Übungen zum Vorkurs Physik	**Blatt Nr. 12**	27.9.2011

Aufgabe 45:

Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Taylorreihen aus **Ü41**, also von:

(a) $f_1(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$

(b) $f_2(x) = \exp(x) = \exp(x_0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!}$

(c) $f_3(x) = \sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

(d) $f_4(x) = \frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, (x-1)^k$

(e) $f_5(x) = \operatorname{artanh}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}$

Aufgabe 46:

Zeigen Sie, dass für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $\frac{d^n}{dx^n} \frac{1+x}{1-x} = \frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$.

Wieviele Terme der Taylorentwicklungen von $\frac{1+x}{1-x}$ und e^{2x} sind identisch?

(b) $\frac{d^n}{dx^n} f(x^2) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{k!}\, (2x)^{n-2k}\, f^{n-k}(x^2)$

[Für gerades n ist $[n/2] := n/2$; Für ungerades n ist $[n/2] := (n-1)/2$.]

Aufgabe 47: (*)

(a) Welchen Konvergenzradius hat $\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n$?

(b) Für welche x konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n\, (x-2)^n$?

(c) Wo konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} n^n\, x^n$?

Aufgabe 48:

(a) Seien $z_1 = 2 - 8i$, $z_2 = -9 + i$ und $z_3 = -2i$.

Berechnen Sie: $z_1 + z_2 - z_3$, $z_1 \cdot z_2^2$, $\dfrac{z_1 + 2z_2}{z_3}$, $\sqrt{z_2 + \dfrac{z_3}{2}}$.

(b) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von

(b1) $\dfrac{1}{1+i}$, $\dfrac{(1+2i)^2}{2+3i}$

(b2) z^3 für beliebiges $z = a + ib \in \mathbb{C}$

(b3) $\sqrt{z}$ für beliebiges $z = a + ib \in \mathbb{C}$