Übungen zum Vorkurs Physik	**Blatt Nr. 16**	5.10.2009

Aufgabe 61:

Betrachten Sie den *euklidischen Vektorraum* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und komponentenweiser Addition $\vec{v}+\vec{w} = (v_1, v_2, ..., v_n)+(w_1, w_2, ..., w_n) := (v_1+w_1, v_2+w_2, ..., v_n+w_n)$ und Multiplikation $x\cdot\vec{v} := (xv_1, xv_2, ..., xv_n)$ (wobei $x \in \mathbb{R}$), sowie Nullvektor $\vec{0} := (0, 0, ..., 0)$ und (add.) inversem Element $-\vec{v} := (-1)\cdot\vec{v}$ wie in der Vorlesung.

Zeigen Sie (durch einfaches Einsetzen), dass die *Vektorraum-Axiome* gelten:

(1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

(2) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

(3) $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$

(4) $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

(5) $x\cdot(y\cdot\vec{v}) = (xy)\cdot\vec{v}$

(6) $1\cdot\vec{v} = \vec{v}$

(7) $x\cdot(\vec{u} + \vec{v}) = x\cdot\vec{u} + x\cdot\vec{v}$

(8) $(x + y)\cdot\vec{v} = x\cdot\vec{v} + y\cdot\vec{v}$

Aufgabe 62: (*)

Sei $V := \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{x^k}{k!} \;\middle|\; c_k \in \mathbb{R},\ c_k \text{ so dass Potenzreihe konvergent} \right\}$

die Menge aller reellen Potenzreihen auf dem Intervall $[0, 1]$.

(a) Können Sie eine geeignete Addition zweier Elemente aus V und eine geeignete äussere Multiplikation mit reellen Zahlen so definieren, dass $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum wird?

[Bem.: dies ist ein sog. *Funktionenraum*; Vektoren sind statt mit $\vec{v}, \vec{w}, ..$ mit $f(x), g(x), ..$ bezeichnet.]

(b) Was ist eine geeignete Basis dieses Vektorraumes? Was ist seine Dimension?

Aufgabe 63:

Es sei eine Abbildung von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (das sogenannte *Skalarprodukt*) definiert durch
$\vec{v} \cdot \vec{w} = (v_1, v_2, ..., v_n) \cdot (w_1, w_2, ..., w_n) := v_1w_1 + v_2w_2 + ... + v_nw_n$.

Zeigen Sie (wieder durch einfaches Einsetzen), dass die sog. *Skalarprodukt-Axiome* gelten:

(1) $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$

(2) $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$, und $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{v} = \vec{0}$

(3) $(x\vec{v}) \cdot \vec{w} = x(\vec{v} \cdot \vec{w})$

(4) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

Aufgabe 64: (*)

Zeigen Sie, dass das durch $f(x) \cdot g(x) := \int_0^1 \mathrm{d}x\, f(x)\, g(x)$ definierte Skalarprodukt auf dem *Funktionenraum* aus **Ü62** die *Skalarprodukt-Axiome* aus **Ü63** erfüllt.