Theorie I (WS 2013/2014) **Inhaltsverzeichnis** 14.10.2013 – 28.01.2014

Vorlesungs-Homepage ist `http://www.physik.uni-bielefeld.de/~yorks/theo1`

Theoretische Physik I

Klassische Physik von Massenpunkten + Feldern
(materielle Welt + Beleuchtung)
Mechanik + Elektrodynamik

4S, E6-118, Di 16-18

www.physik.uni-bielefeld.de/~yorks/theo1 { Termine, Skript, Übungen

Orga

Vorl Mo, Di, Do 10:15-12 (H6/H6/H5)
15 Wo × 5h = 75h = 12.5 Wo × 6h

Ü: Mi 14-16 (D01-249), Do 16-18 (D01-249), Fr 8-10 (S2-143), 10-12 (D01-249), $((12-14))^2$ (F1-125, V3-204)

→ Einteilung: Doodle
→ erste (Präsenz-) Ü: diese Woche
→ Ablauf: Di Ü-Blatt, 1 Wo bearbeiten,
in Ü 50% ankreuzen + vorrechnen

Kl 21.2.2014 9:30 - 12 (H4)
Nachholtermin 4.4.2014 9:30-12 (H4)

Lit s.a. website
Sem-Apparat

Q sehr willkommen!

0. Inhalt / Vorgeschmack

allg. Prinzipien / Begriffe / Methoden dieser Vorl
bilden Grundlage unserer Naturbeschreibung (QM, QFT, ART)

⇝ Themen:

klass. Mechanik
- Newton, Lagrange, Hamilton
- Bewegungsgln, Symmetrien, Erhaltungsgrößen, Zwangsbedingungen
- ein / mehrere / unendlich viele Teilchen
- exakte Lösungen, kleine Schwingungen darum

klass. Elektrodynamik
- Elektrostatik, Magnetostatik, Wellen
- Bewegungsgln, Feldlösung, Greensfunktionen, Feldenergie

spez. Relativitätstheorie (Ausblick; s. auch Theorie II)
- Mechanik, Elektrodynamik
- Lorentz-Trafo, Vierer-Tensoren

⇝ (relativ.) Mechanik + E-Dynamik = klassische Physik
→ eine vollständige Theorie
→ zwei fundamentale Konzepte
- Teilchen, mit Koord. x und Impuls p, bewegt sich via Newton
- Welle, füllt Raum, gegeben durch $\vec{E}, \vec{B}$-Felder, ändert sich via Max.

→ schön aufgeräumt, einfach, intuitiv, deterministisch, reversible Dynamik

((→ aber falsch: klass. Physik hat nicht den Schimmer einer Erklärung für Atom-Existenz, Kern-Zerfall, Supraleiter, Paarerzeugung, ...))

1. Newtonsche Mechanik

hier: als kurze Einführung / Übersicht

(bekannt aus "Einführung in die Physik I")

1.1 Grundbegriffe, Newtonsche Axiome

einige Begriffe / Notation:

Raum : 3-dimensional, statisch, euklidisch
es gibt kartesische Koordinatensysteme

Ortsvektor : $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{r} \in \mathbb{R}^3$

als Pfeil Ursprung → Physik

⇝ hat Ausgangspunkt $(\vec{0})$, Richtung $(\vec{e}_r)$, Betrag $(r = |\vec{r}|)$

Zeit: 1-dimensional, universal (überall synchronisiert)

Massenpunkt : keine Struktur ; Masse m

Bahnkurve : $\vec{x}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

Geschwindigkeit : $\vec{v} = \dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \partial_t \vec{x}$; Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$

Beschleunigung : $\vec{a} = \ddot{\vec{x}} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$

Kraft : $\vec{F} \in \mathbb{R}^3$, ist additiv : $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$

Newtonsche Axiome

I Es gibt Inertialsysteme,
d.h. Koord.-Systeme in denen ein Massenpunkt, an dem keine Kraft angreift, ruht oder sich gleichförmig bewegt,
also $\ddot{\vec{x}} = \vec{0}$.

II In Inertialsystemen gilt $\vec{F} = \dot{\vec{p}} \overset{m = \text{const.}}{=} m\ddot{\vec{x}}$

III Die von zwei Massenpunkten aufeinander ausgeübten Kräfte sind entgegengesetzt gleich : $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Bemerkungen

- I ist Spezialfall von II
- II heisst Bewegungsgleichung
- wir betrachten (wenn nicht ausdrücklich anders gesagt) nur konstante Massen. Dann ist

  II : $\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{x}}) = \dot{m}\dot{\vec{x}} + m\ddot{\vec{x}} = m\ddot{\vec{x}}$
- II definiert die "träge Masse" m des Massenpunktes.
  Mit Hilfe von III kann man diese (als Vielfaches einer international festgelegten, normierten Masseneinheit) messen:

  System von 2 Massen, $m_1\ddot{\vec{x}}_1 = \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -m_2\ddot{\vec{x}}_2$

  $\Rightarrow \; m_1/m_2 = |\ddot{\vec{x}}_2| / |\ddot{\vec{x}}_1|$
- In II wird vorausgesetzt, dass $\vec{F}$ höchstens von $\vec{x}, \dot{\vec{x}}$ abhängt
- II ist ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung (da nur $\ddot{\vec{x}}$ und nicht $\dddot{\vec{x}}$ etc. vorkommt)

  ⇒ mit gegebenen Anfangsbedingungen $\vec{x}(0)$, $\dot{\vec{x}}(0)$ und Kraft $\vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}})$ gibt es eine eindeutige Lösung.

Bsp (Wurf mit Luftreibung)

wir betrachten einen Massenpunkt im homogenen Schwerefeld mit Luftreibung:

$$\vec{F} = \underbrace{\vec{F}_S}_{= m_s \vec{g}} + \underbrace{\vec{F}_R}_{= -\alpha \vec{v}} \quad , \ \alpha = \text{konstant} \ ; \ \text{"Stokessche Reibung"}$$

m_s = "schwere Masse";

expt.: $m_s \sim m$ (da alle Körper gleich fallen)

$\rightarrow$ wähle $m_s = m$

dann (auf der Erdoberfl.) $|\vec{g}| \approx 9{,}8 \ \frac{m}{s^2}$

Bewegungsglg.: $m\vec{g} - \alpha \dot{\vec{x}} = m \ddot{\vec{x}}$

$\Leftrightarrow \ \dot{\vec{v}} + \frac{\alpha}{m} \vec{v} = \vec{g}$ lin inh Dgl 1.O.

Lösung:

(1) allg. Lsg der hom. Dgl. ($\vec{v}_h$)

$\frac{d\vec{v}_h}{dt} = -\frac{\alpha}{m} \vec{v}_h$, Ansatz $\vec{v}_h = v_h \cdot \vec{e}$

$\frac{dv_h}{v_h} = -\frac{\alpha}{m} dt \ \Leftrightarrow \ \ln v_h = -\frac{\alpha}{m}(t - t_0) \ \Leftrightarrow \ v_h = c\, e^{-\frac{\alpha}{m}t}$

(2) spez. Lsg der inhom. Dgl. ($\vec{v}_s$)

$\dot{\vec{v}}_s + \frac{\alpha}{m} \vec{v}_s = \vec{g}$, versuche $\dot{\vec{v}}_s = \vec{0} \ \Rightarrow \ \vec{v}_s = \frac{m}{\alpha} \vec{g}$ ✓

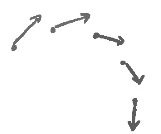
(3) allg. Lsg der inhom. Dgl

$\vec{v} = \vec{v}_h + \vec{v}_s = c\, \vec{e}\, e^{-\frac{\alpha}{m}t} + \frac{m}{\alpha} \vec{g}$

(4) Konstanten durch Anfangsbedingung festlegen (bei $t=0$)

$\vec{v}(0) = c\vec{e} + \frac{m}{\alpha}\vec{g} \ \Leftrightarrow \ c\vec{e} = \vec{v}(0) - \frac{m}{\alpha}\vec{g}$

$\Rightarrow \vec{v}(t) = \underbrace{\vec{v}(0)\, e^{-\frac{\alpha}{m}t}}_{\text{Anfangsgeschw. verschwindet wg Reibung}} + \underbrace{\frac{m}{\alpha}\vec{g}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right)}_{\text{Endzustand unabh. v. Anfangsbed.}}$



(5) Bahnkurve: $\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \int_0^t dt' \, \vec{v}(t') = \ldots$

1.2 Arbeit, konservative Kraft, Potential

Im Allg., $\vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)$

(falls $\vec{F}$ nicht von $\dot{\vec{r}}$ abhängt, nennt man $\vec{F}(\vec{r}(t), t)$ Kraftfeld)

def Arbeit $dW = \vec{F} \cdot \underbrace{d\vec{r}}_{\text{infinit. Wegelement}}$

- Summation entlang einer Kurve C $\rightarrow$ Kurvenintegrale
- Parametrisierung von C: oft Zeit t als Par.

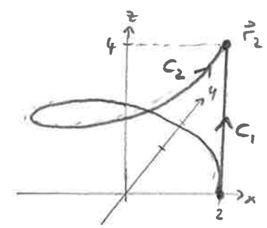
  beschreibe C durch $\vec{r}(t)$ für $t \in [t_1, t_2]$ $\Rightarrow$ $d\vec{r} = \vec{v}\, dt$

  $\rightarrow$ Kurvenintegral ist gewöhnliches Integral, und Arbeit

  $W = \int_{t_1}^{t_2} dt \ \vec{v} \cdot \vec{F}$

Bsp (auf zwei verschiedenen Wegen von $\vec{F}$ geleistete Arbeit)

sei $\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ x^2/2m \\ x+z \end{pmatrix} \frac{N}{m}$



bewege Massenpunkt von

$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 2m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 2m \\ 0 \\ 4m \end{pmatrix}$

(C_1) auf Gerade $\parallel$ z-Achse

$d\vec{r} = \vec{e}_z\, dz \ \Rightarrow \ W_1 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_0^{4m} dz \ \vec{e}_z \cdot \vec{F} = \int_0^{4m} dz \, (2m + z) \frac{N}{m} = 16 \ Nm$

(C_2) auf Schraubenlinie um z-Achse

$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2m \cdot \cos\varphi \\ 2m \cdot \sin\varphi \\ 4m \cdot \varphi/2\pi \end{pmatrix}$ mit $\varphi \in [0, 2\pi]$ ist Par-Darst v. C_2

$\Rightarrow W_2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \ \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \cdot \vec{F} = \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} -2m \sin\varphi \\ 2m \cos\varphi \\ 2m/\pi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2m \sin\varphi \\ 2m \cos^2\varphi \\ 2m\cos\varphi + 2m\, \varphi/\pi \end{pmatrix} \frac{N}{m}$

$= \left[-4\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right) + 4\left(\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right) + \frac{2}{\pi}\left(2\sin\varphi + \frac{\varphi^2}{\pi}\right) \right]_{\varphi=0}^{2\pi} Nm$

$= (8 - 4\pi)\ Nm$

(($\Rightarrow W_1 \neq W_2$, $\vec{F}$ war "nicht konservativ", s.u.))

Bsp (von Lorentzkraft verrichtete Arbeit)

bewegte Ladung $(q, \vec{v})$ im Magnetfeld $\vec{B}$

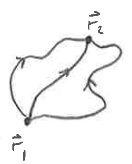
$\rightarrow$ es wirkt die Lorentzkraft $\vec{F} = q\, \vec{v} \times \vec{B}$

$\Rightarrow$ Arbeit $W = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{v}(t) \cdot \underbrace{\underbrace{\left(q\, \vec{v}(t) \times \vec{B}(\vec{r}(t))\right)}_{\perp \vec{v}}}_{=0} = 0$

((CERN: Geschw. geladener T. lassen sich nur mit $\vec{E}$, nicht mit $\vec{B}$-Feldern erhöhen! $\vec{B}$ ändert Richtung, aber nicht Betrag der Geschw.))

Def ein zeitunabh. Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ heisst konservativ, wenn es ein Potential $V(\vec{r})$ gibt, mit $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$

Bem



- $V(\vec{r})$ heisst auch potentielle Energie (s.a.)
- für konservative Kräfte ist die Arbeit wegunabhängig:
  $W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{r}) = -[V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1)]$
- $V(\vec{r})$ ist bis auf eine additive Konstante eindeutig.

Beh. es gilt $\vec{F}$ konservativ $\Leftrightarrow$ $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$

(für einfach zusammenhängende Gebiete, d.h. solche in denen sich jede geschlossene Kurve auf einen Punkt zusammenziehen lässt.

)

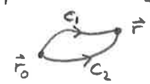
Beweis: "$\Rightarrow$": $\vec{F} = -\vec{\nabla} V \Rightarrow -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V) = 0$

$$\left(\left(\text{denn } (\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V))^i = \sum_{jk} \underbrace{\varepsilon^{ijk}}_{\substack{\text{antisy.}\\ j \leftrightarrow k}} \underbrace{\partial_{x_j} \partial_{x_k}}_{\substack{\text{symm}\\ j \leftrightarrow k}} V = 0\right)\right)$$

"$\Leftarrow$": sei $\vec{r}_0$ beliebig, def $V(\vec{r}) \equiv -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{s} \cdot \vec{F}(\vec{s})$

diese Def. ist wegunabhängig, denn:

$$\int_{C_1} d\vec{s} \cdot \vec{F} - \int_{C_2} d\vec{s} \cdot \vec{F} = \oint_C d\vec{s} \cdot \vec{F} = \int_A d\vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$



Stokes (s. Ü2)
(da einfach zus. hgd.)

$\rightsquigarrow$ also $\int_{C_1} d\vec{s} \cdot \vec{F} = \int_{C_2} d\vec{s} \cdot \vec{F}$

wähle nun $C_1 = \vec{r} \to \vec{r}+\vec{\varepsilon}$, $C_2 = \vec{r}_0 \to \vec{r}+\vec{\varepsilon}$, $\vec{r}_0 \to \vec{r}$

dann (C_1) $\int_{\vec{r}}^{\vec{r}+\vec{\varepsilon}} d\vec{s} \cdot \vec{F} = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{F}(\vec{r}) + O(\vec{\varepsilon}^2)$

(C_2) $-\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{s} \cdot \vec{F} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}+\vec{\varepsilon}} d\vec{s} \cdot \vec{F} \underset{\text{nach def}}{=} V(\vec{r}) - V(\vec{r}+\vec{\varepsilon}) = -\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\nabla} V + O(\vec{\varepsilon}^2)$

dies gilt für beliebige $\vec{\varepsilon}$ $\Rightarrow$ $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ $\quad$ ged

Bsp (Arbeit von konservativen Kräften) s. Ü5, Ü6

- Gravitationskraft, Coulombkraft, Federkraft: konservativ
- Reibungskraft nicht konservativ: Reibungsarbeit hängt von Länge des Wegs ab (s.a. S.5, S.6)

Def kinetische Energie $T \equiv \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2$ $\quad$ ($m = $ const)

damit ist $\int_1^2 d\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \dot{\vec{r}}(t) \cdot \underbrace{m \ddot{\vec{r}}}_{\text{(Newton)}} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \partial_t T = T(t_2) - T(t_1)$

andererseits, für konservative Kräfte $= -\int_1^2 d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} V = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$

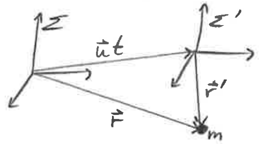
$\Rightarrow$ $T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \equiv E$ $\quad$ Energieerhaltungssatz

für konservative Kräfte ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant!

1.3 Beschleunigte Bezugssysteme / Scheinkräfte

Newton ($\vec{F} = \dot{\vec{p}}$) gilt in (allen) Inertialsystemen, vgl. S.4;
ist invariant unter Galileitransformationen ("Boost")

Σ, Σ' bewegen sich mit konstanter Geschw. $\vec{u}$ relativ zueinander,

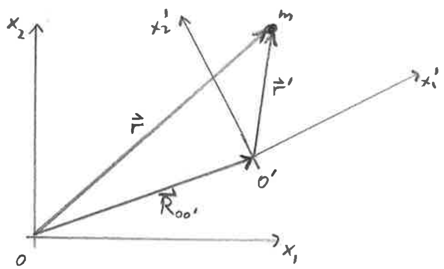


wähle $\Sigma = \Sigma'$ bei $t = 0$

Koordinaten des Massenpunktes m:
$\vec{r}(t) = \vec{u}\,t + \vec{r}\,'(t)$

$\Rightarrow \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{\vec{r}}\,'(t)$, Newton invariant ged

$\rightarrow$ betrachte nun Koord.-Trafo, die keine Galileitrafo ist.
Σ sei Inertialsystem, Σ' sei beschleunigtes Bezugssystem



- Translationen: Bewegung des Ursprungs O', $\vec{R}_{00}$
- Rotationen: System Σ' rotiert um seinen Ursprung O', mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$

$\rightarrow$ wie lautet die Bwgl. in Σ', also für $\vec{r}\,'$?

laut Abb.: $\vec{r}(t) = \vec{R}_{00'}(t) + \vec{r}\,'(t)$ in Vektor-Form

bzw. $\sum_{i=1}^{3} x_i(t)\,\vec{e}_i = \vec{R}_{00'}(t) + \sum_{i=1}^{3} x_i'(t)\,\vec{e}_i\,'(t)$ in Komponenten

$\partial_t \Rightarrow \dot{x}_i\,\vec{e}_i = \dot{\vec{R}}_{00'} + \dot{x}_i'\,\vec{e}_i\,' + x_i'\,\dot{\vec{e}}_i\,'$ (hier mit Einstein'scher Summenkonvention)

$$\left[\begin{array}{l} \text{z.B. } \Sigma' \text{ rotiert um } x_3\text{-Achse, } \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \\ \text{dann ist } \vec{e}_1\,'(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \dot{\vec{e}}_1(t) = \begin{pmatrix} -\omega\sin(\omega t) \\ \omega\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{\omega} \times \vec{e}_1\,'(t) \end{array}\right]$$

allg. gilt $\dot{\vec{e}}_i\,' = \vec{\omega} \times \vec{e}_i\,'$

also $\dot{x}_i\,\vec{e}_i = \dot{\vec{R}}_{00'} + \dot{x}_i'\,\vec{e}_i\,' + \vec{\omega} \times x_i'\,\vec{e}_i\,'$

bzw $\underbrace{\dot{\vec{r}}}_{\vec{v} \text{ in } \Sigma} = \underbrace{\dot{\vec{R}}_{00'}}_{\text{Relativ-geschw. der Ursprünge}} + \underbrace{\dot{\vec{r}}\,'}_{\vec{v}\,' \text{ in } \Sigma'} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}\,'}_{\text{in } \Sigma \text{ gemessene Geschw. eines starr mit } \Sigma' \text{ verbundenen Punktes}}$

$\partial_t \Rightarrow \ddot{x}_i\,\vec{e}_i = \ddot{\vec{R}}_{00'} + \ddot{x}_i'\,\vec{e}_i\,' + \underbrace{\dot{x}_i'\,\dot{\vec{e}}_i\,' + \vec{\omega} \times \dot{x}_i'\,\vec{e}_i\,'}_{= 2\vec{\omega} \times \dot{x}_i'\,\vec{e}_i\,'} + \vec{\omega} \times x_i'\,\dot{\vec{e}}_i\,' + \dot{\vec{\omega}} \times x_i'\,\vec{e}_i\,'$

bzw. $\underbrace{\ddot{\vec{r}}}_{= \vec{F}/m} = \ddot{\vec{R}}_{00'} + \ddot{\vec{r}}\,' + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,'$ (nach Newton im Inertialsystem Σ)

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} m\ddot{\vec{r}}\,' = \vec{F} - \underset{①}{m\ddot{\vec{R}}_{00'}} - \underset{②}{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')} - \underset{③}{2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}\,'} - \underset{④}{m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,'} \\ \text{Bewegungsgleichung im beschleunigten } (\vec{R}_{00'}, \vec{\omega}) \text{ Bezugssystem} \end{array}}$$

Bem.:
- Bwgl. in Σ' hat Form wie in Σ, aber haben $\vec{F}$ + "Scheinkräfte" als Ursache auf RHS
- $m\ddot{\vec{r}}\,' \neq 0$, auch wenn $\vec{F} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ Σ' kein Inertialsystem
- ① von Beschleunigung des Ursprungs
  $\rightarrow$ z.B. spürbar bei Flugzeugstart etc.
- ② heisst Zentrifugalkraft (auch: Fliehkraft); ist $\perp \vec{\omega}$
  $\rightarrow$ Kurvenfahrt, Kraft nach außen
- Ü8 $\rightarrow$ ③ heisst Corioliskraft ; geschwindigkeitsabhängig; $\perp \vec{\omega}, \vec{v}\,'$
  $\rightarrow$ wichtig für Meteorologie, Artillerie, Flussdynamik, ...
  └ Passatwinde, Wirbelstürme
- ④ von nichtgleichförmiger Rotation
  eher unwichtig, da meist $\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$

1.4 Mehrteilchensysteme; Erhaltungsgrößen

→ hier: Systeme mit $N \geq 2$ Massenpunkten
(s. auch 'starrer Körper' in §3)

z.B. Atome eines Gases
durch Federn gekoppelte Massen
Planeten im Sonnensystem

→ je mehr Erhaltungsgrößen (vgl. §1.2, S.8) bekannt sind, desto genauer kennt man die System-Dynamik
(auch ohne explizite Lsg der Bewgl!)

- Impulserhaltung

$N=1$: $(\vec{p} = m\dot{\vec{r}})$, $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$

N Teilchen: Kraft auf i-tes T. $\vec{F}_i = \underbrace{\vec{F}_i^{ext}}_{\text{externe Kräfte (z.B. } m_i\vec{g})} + \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}}_{\text{innere Kräfte}}$ $(\vec{F}_{ii} = \vec{0})$

$$\Rightarrow \dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{ext} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = \vec{0} \quad (\text{Newton III: } \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji})$$

⇝ Gesamtimpuls $\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$ ist erhalten, falls keine externen Kräfte wirken.

bzw. mit Gesamtmasse $M \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i$, Schwerpkt $\vec{R} \equiv \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i$

$$\Rightarrow M\ddot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{ext} \equiv \vec{F}^{ext} \qquad (m_i = \text{const.})$$

⇝ Schwerpunkt bewegt sich wie ein Teilchen mit Masse M, an dem alle externen Kräfte angreifen
(Schwerpunktsatz)

- Drehimpulserhaltung

$N=1$: $(\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = m\vec{r}\times\dot{\vec{r}})$

$$\dot{\vec{L}} = m\underbrace{\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}}}_{=0} + m\vec{r}\times\ddot{\vec{r}} = \underbrace{\vec{r}\times\vec{F}}_{\text{Drehmoment}}$$

N Teilchen: $\vec{L} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i\times\vec{p}_i = \sum_i m_i\vec{r}_i\times\dot{\vec{r}}_i$ Gesamtdrehimpuls

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i\times\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times\vec{F}_i, \quad \vec{F}_i \overset{(s.o.)}{=} \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ij}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times\vec{F}_i^{ext}}_{\text{Drehmoment der externen Kräfte}} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{r}_i\times\vec{F}_{ij}$$

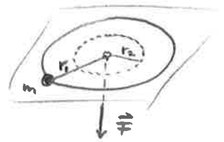
$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{r}_i\times\vec{F}_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}(\vec{r}_i\times\vec{F}_{ij} + \vec{r}_j\times\vec{F}_{ji}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\times\vec{F}_{ij} = \vec{0}$$

← meistens; da $\vec{F}_{ij} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$
z.B. für Schwerkraft, Coulomb, ...
nicht für z.B. Reibung, ..

⇝ Gesamtdrehimpuls $\vec{L} \equiv \sum_{i=1}^{N}\vec{L}_i$ ist erhalten, falls keine externen Kräfte wirken (und innere Kräfte ∥ Verbindungsvektoren)

Bem.: • Drehimpuls (und Drehmoment) hängen von Wahl des Koord.-Ursprungs ab (da $\sim\vec{r}_i$); die Gln. oben gelten natürlich für alle Ursprünge bzw. Inertialsysteme.

Bsp.:



T. mit Masse m, rotiert mit v_1 auf Tischplatte, Radius r_1 (ideal, reibungsfrei..)

(nach Ziehen am Faden:) Geschw. v_2 bei Radius r_2?

Lsg Ursprung in Mitte ⇒ $\vec{F}_{Faden} \parallel$ Ortsvektor $\vec{r}$ ⇒ kein Drehmoment

also $\dot{\vec{L}} = \vec{0}$, $L = |\vec{L}| = \text{const} = m r_1 v_1 = m r_2 v_2$

$$\Leftrightarrow v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1$$

(($v_2 > v_1$. E-Gewinn?! ja: Ziehen am Faden verrichtet Arbeit))

Def eine Funktion $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \ldots, \dot{\vec{r}}_N, t)$ (Ortsvektor des N-ten T. im Inertialsyst.)

heisst <u>Erhaltungsgröße</u> (bzw. '<u>Konstante der Bewegung</u>'),

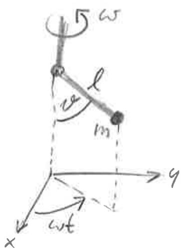
wenn sie für alle Lsn $\vec{r}_i(t)$ der Bwglen konstant ist:

$$\frac{d}{dt} f(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \ldots, \dot{\vec{r}}_N, t) = 0$$

((Bsp: reibungsfreier schiefer Wurf $E(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = T + V = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + mgz$))

$\rightarrow$ jede Erhaltungsgröße erleichtert das Lösen der Bwgln (verringert Anzahl der nötigen Integrationen um eins)

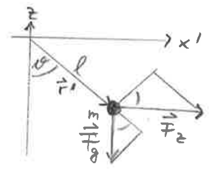
<u>Bsp.:</u> Pendel (m, ℓ) auf angetriebener Achse (ω konstant)



(a) Bwgl. aufstellen:

im mitrotierenden System Σ',

$\vec{r}\,' = \ell(\sin\vartheta, 0, -\cos\vartheta)$



$\Rightarrow \dot{\vec{r}}\,' = \ell\dot{\vartheta}(c, 0, s)$, $\ddot{\vec{r}} = \underset{\sim}{\ell\ddot{\vartheta}}(c, 0, s) - \ell\dot{\vartheta}^2(s, 0, -c)$

Beschleunigung in tang. Richtung

$\rightsquigarrow$ tangentiale Komp. der Gewichtskraft: $-mg\sin\vartheta$

$\rightsquigarrow$ Zentrifugalkraft $-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') = m\ell\omega^2(\sin\vartheta, 0, 0)$, $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$

((vgl. §1.3, S.10)) $\rightarrow$

hat tang. Komp. $+m\ell\omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta$

$\Rightarrow m\ell\ddot{\vartheta} = -mg\sin\vartheta + m\ell\omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta$

(b) Erhaltungsgröße (oft angewandter Trick: Bwgl $*$ (Funktion)$^\cdot$):

Bwgl. $* \ell\dot{\vartheta}$: $m\ell^2\dot{\vartheta}\ddot{\vartheta} = -mg\ell\dot{\vartheta}\sin\vartheta + m\ell^2\omega^2\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{m}{2}(\ell\dot{\vartheta})^2 - \frac{m}{2}(\ell\omega\sin\vartheta)^2 - mg\ell\cos\vartheta}_{\equiv f(\vartheta, \dot{\vartheta}) \,=\, \text{Erhaltungsgröße} \,=\, \text{const} \,\equiv\, C}\Big) = 0$$

(c) Bwgl. lösen durch <u>eine</u> Integration:

$$\dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{dt} = \pm\frac{1}{\ell}\sqrt{\frac{2C}{m} + (\ell\omega\sin\vartheta)^2 + 2g\ell\cos\vartheta}$$

$$\Leftrightarrow t = \pm\ell\int_{\vartheta_0}^{\vartheta(t)} d\vartheta' \left(\frac{2C}{m} + (\ell\omega\sin\vartheta')^2 + 2g\ell\cos\vartheta'\right)^{-\frac{1}{2}}$$

((hier Stammfkt nicht als elementare Fkt darstellbar))

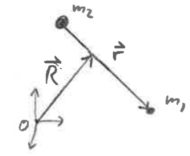
<u>Spezialfall:</u> $N = 2$

betrachte 2 T. mit Ortsvektoren $\vec{r}_i$, $i = 1, 2$

ohne externe Kräfte ("<u>abgeschlossenes System</u>")

Bwgl: $m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{21}$

$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$



Schwerpunkt $\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$

Relativkoord. $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

$\left(\Leftrightarrow \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}\right)$

$\Rightarrow \ddot{\vec{R}} = \frac{m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2}{m_1+m_2} = \frac{\vec{F}_{21} - \vec{F}_{21}}{m_1+m_2} = \vec{0}$ (Impulserhaltung!)

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{21} = \underbrace{\boxed{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}}}_{\equiv \frac{1}{\mu}}\vec{F}_{21}$$

$\leftarrow$ <u>reduzierte Masse</u> μ

- wenn $\vec{F}_{21}$ nur von $\vec{r}$ abhängt, folgt die Bwgl

  $\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{21}(\vec{r})$

  große Vereinfachung: 2-Teilchen-System zurückgeführt auf Bewegung <u>eines</u> Teilchens, mit Masse μ.

Bsp: <u>Ü9</u> $\Rightarrow$

(oft ist $m_2 \gg m_1$; dann $\mu \approx m_1$, $\vec{R} \approx \vec{r}_2$, $\vec{r}_1 \approx \vec{R} + \vec{r}$,
d.h. Massenpkt 2 ruht auf Position $\vec{R}$.)

- wenn zusätzlich $\vec{F}_{21}(\vec{r}) \parallel \vec{r}$ ist (Gravitation ✓ Coulomb ✓, ...),

  spricht man von einem <u>Zentralkraftproblem</u>.

  $\rightsquigarrow$ schreibe $\vec{F}_{21}(\vec{r}) = f(r)\vec{r}$, $r \equiv |\vec{r}|$ (vgl. <u>Ü5</u>)

  $\rightsquigarrow$ $\vec{L} = \mu\vec{r}\times\dot{\vec{r}}$ bleibt erhalten (da $\vec{F} \parallel \vec{r}$, s. S.12)

  $\rightsquigarrow$ Bewegung findet in Ebene $\perp \vec{L}$ statt

  ((da $\vec{r}\cdot\vec{L} \sim \vec{r}\cdot(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) = 0$))

1.5 Anwendung: Kepler

(als wichtigstes Bsp. eines Zentralkraftproblems) ↙ s. Ü11 für $V = -\alpha/r^2$

Kepler-Problem: $\vec{F} = -\vec{\nabla} V(r)$ mit $V(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$ (Gravitationspot.)

((Newton'sche Gravitationskonstante $\gamma = 6.673\ldots \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2}$))

dies ist
- Zentralkraft ⇒ Drehimpulserhaltung
- konservative Kraft ⇒ Energieerhaltung

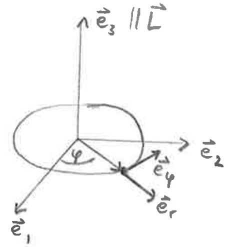
⇝ können (drei) Kepler'sche Gesetze aus Erhaltungsgrößen herleiten.

- geeignete Koordinaten: Zylinderkoord.

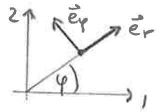
$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$

⇒ $\vec{r} \perp \vec{L}$ und $\dot{\vec{r}} \perp \vec{L}$

⇝ $\vec{r}(t)$ bleibt ($\forall t$) in Ebene $\perp$ $\vec{L}$



⇝ Bahnkurve lässt sich durch Zylinderkoord. parametrisieren



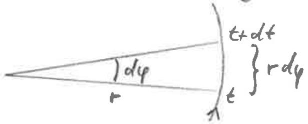
$$\left.\begin{aligned} \vec{e}_r &= \cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\varphi\, \vec{e}_2 \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\, \vec{e}_1 + \cos\varphi\, \vec{e}_2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = 0 \\ &\dot{\vec{e}}_r = \dot\varphi(-s\vec{e}_1 + c\vec{e}_2) = \dot\varphi\, \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

$$\vec{r}(t) = r(t)\, \vec{e}_r(t) = r(t) \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

- mit $\vec{r} = r\vec{e}_r$, $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot\varphi\vec{e}_\varphi$

wird $\vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu r \dot{r} \overset{0}{\cancel{\vec{e}_r \times \vec{e}_r}} + \mu r^2 \dot\varphi\, \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \mu r^2 \dot\varphi\, \vec{e}_3$

Drehimpulserhaltung ⇒ $L \equiv |\vec{L}| = \mu r^2 \dot\varphi = \text{const.}$



überstrichenes Flächenelement:

$df = \frac{1}{2} r\, r d\varphi = \frac{r^2}{2}\dot\varphi\, dt = \frac{L}{2\mu} dt$

⇒ $\frac{df}{dt} = \frac{L}{2\mu} = \text{const.}$

„Kepler II" ⇝ dies ist der Kepler'sche Flächensatz: Ortsvektor überstreicht in gleichen Zeitintervallen gleiche Flächen. $\Big\}\ \forall V(r)$

- benutze Erhaltungsgrößen zur Bestimmung der Bahnkurve $r(\varphi)$

s. auch Ü10 ↗ Drehimpulserhaltung $\mu r^2 \dot\varphi = L = \text{const.}$

Energieerhaltung $T + V = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 + V(r) = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot\varphi^2) + V(r) = E = \text{const.}$

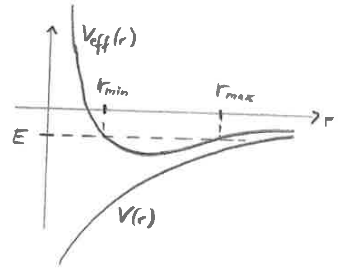
$$\Rightarrow E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)}_{= V_{eff}(r)}$$ effektives Potential

$$\Leftrightarrow \dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left[E - \frac{L^2}{2\mu r^2} - V(r)\right]}$$

⟶ $[\ldots] \geq 0$

⇝ Umkehrpunkte folgen aus "=":

$\dot{r} = 0 \Leftrightarrow E = V_{eff}(r)$



⇝ unterscheide 2 Arten von Bewegungen:
- "gebunden": $r_{max} < \infty$ $(E < 0)$
- "ungebunden": $r_{max} = \infty$ $(E > 0)$

⟶ Drehimpulserhaltung für $dt \to d\varphi$ benutzen:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{L}{\mu r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\mu r^2}{L}\dot{r} = \frac{r^2}{L}\sqrt{2\mu[E - V(r)] - L^2/r^2}$$

(Vz. für 'auslaufende Bewegung', d.h. $\dot{r} > 0$)

$$\Leftrightarrow d\varphi = \frac{dr\, L}{r^2\sqrt{2\mu[E - V(r)] - L^2/r^2}}$$

$$\Leftrightarrow \varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2} \frac{L}{\sqrt{2\mu[E - V(r')] - L^2/r'^2}} \qquad (r_0 \geq r_{min},\ r \leq r_{max})$$

- müssen nun $V(r)$ spezifizieren, um $\int dr'$ zu lösen

sei $\boxed{V(r) = -\frac{\alpha}{r}}$ ($\alpha = \gamma m_1 m_2 > 0$ für Gravitationskraft; $\alpha < 0$ möglich, für abstoßende Kraft, z.B. Coulomb)

$$\Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2} L \left(2\mu \left(E + \frac{\alpha}{r'} \right) - \frac{L^2}{r'^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

neue Integrationsvariable: $u \equiv \frac{1}{r'}$ $\Rightarrow$ $du = -\frac{dr'}{r'^2}$

$$= -\int_{u_0}^{u} du\, L \left(2\mu (E + \alpha u) - L^2 u^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\int_{u_0}^{u} du \left(\frac{2\mu E}{L^2} + 2\frac{\mu\alpha}{L^2} u - u^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Integral hat elementare Lsg; check Bronstein / Mathematica / oder:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a + b^2 - (x-b)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a+b^2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-b}{\sqrt{a+b^2}} \right)^2}}$$

$$\frac{x-b}{\sqrt{a+b^2}} = y, \quad dy = \frac{dx}{\sqrt{\cdots}}$$

$$= \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = c + \arcsin(y) = c' - \arccos(y)$$

$$= \arccos \left(\frac{\frac{1}{r'} - \frac{\mu\alpha}{L^2}}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \left(\frac{\mu\alpha}{L^2} \right)^2}} \right) \Bigg|_{r'=r_0}^{r}$$

mit $\varphi = \varphi_0$ bei $r = r_0$ $\Rightarrow$ $\cos\varphi = \dfrac{\frac{1}{r} - \frac{\mu\alpha}{L^2}}{\frac{\mu\alpha}{L^2}\sqrt{1 + \frac{2L^2E}{\mu\alpha^2}}}$

zur Vereinfachung: Def $e \equiv \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{\mu\alpha^2}}$ Exzentrizität

$p \equiv \frac{L^2}{\mu\alpha}$

$$\Rightarrow e\cos\varphi = \frac{p}{r} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{r(\varphi) = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}} \quad \text{Bahnkurve}$$

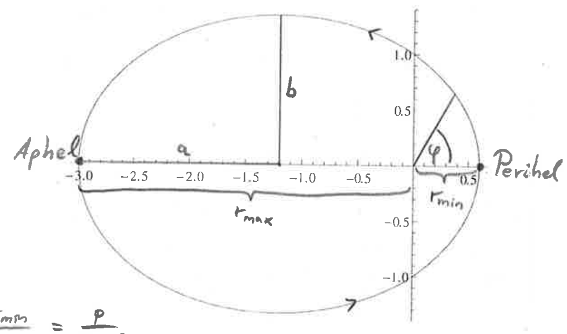
Bem.:
- haben geometrische Form der Bahn $r(\varphi)$ erhalten; explizite Lsg $r(t), \varphi(t)$ kompliziert [Goldstein/Poole/Safko]
- $r(\varphi)$ sind Kegelschnitte: Kreis / Ellipse / Parabel / Hyperbel für $e=0$ / $0<e<1$ / $e=1$ / $e>1$
- haben geschlossene Bahnen erhalten; Spezialität des Grav-Pot. ((für andere $V(r)$ i.A. ))

- Analyse der Bahnkurve

z.B. $E < 0 \Rightarrow e < 1$

$\rightarrow$ Planetenbahnen sind Ellipsen mit Sonne in einem Brennpunkt ($r=0$) "Kepler I"

PolarPlot[1 / (1 + 2 / 3 Cos[phi]), {phi, 0, 2 Pi}]



$\rightarrow$ Periheldistanz $= r_{min} = \frac{p}{1+e}$

Apheldistanz $= r_{max} = \frac{p}{1-e}$

große Halbachse $a = \frac{r_{max} + r_{min}}{2} = \frac{p}{1-e^2}$

kleine Halbachse b, in kartes. Koord $y(r,\varphi) = r\sin\varphi = \frac{p\sin\varphi}{1+e\cos\varphi}$

oben $0 \stackrel{!}{=} \partial_\varphi y = \frac{e + \cos\varphi}{(1 + e\cos\varphi)^2}$ $\Leftrightarrow$ $\cos\varphi = -e$ $\Leftrightarrow$ $b = \frac{p\sqrt{1-e^2}}{1-e^2}$

$\rightarrow$ für die Umlaufzeit T gilt (S.15: $\frac{df}{dt} = \frac{L}{2\mu}$)

$T = \frac{2\mu f}{L}$, wobei f = Flächeninhalt Ellipse $= \pi a b$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\mu^2 f^2}{L^2} = \frac{4\mu^2\pi^2 p}{L^2} a^3 = \frac{4\mu\pi^2}{\alpha} a^3 = \frac{4\pi^2}{\gamma(m_1+m_2)} a^3$$

$\rightsquigarrow$ Quadrate der Umlaufzeiten von Planeten sind proportional zur dritten Potenz der großen Bahnhalbachse "Kepler III"

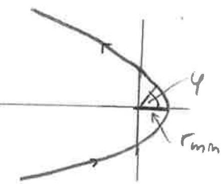
- ungebundene Bewegung

$\rightarrow$ $\alpha > 0$ (anziehende Kraft), $E \geq 0 \Rightarrow e \geq 1$

$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$

$r_{min} = \frac{p}{1+e}$ bei $\varphi = 0$

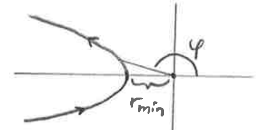
$r \to \infty$ bei $\cos\varphi \to -\frac{1}{e}$



$\rightarrow$ $\alpha < 0$ (abstoßende Kraft), Lösung wie oben, mit $p = \frac{L^2}{\mu\alpha} < 0$: $p = -|p|$, $E > 0 \Rightarrow \varepsilon > 1$

$r = \frac{-|p|}{1 + e\cos\varphi}$

$r_{min} = \frac{-|p|}{1-e} > 0$ bei $\varphi = \pi$



1.6 Streuung im Zentralkraftfeld

historisch: Planetenbahnen → Interesse an Zentralkräften

heute: wichtig auch wenn Planeten → Teilchen : "Streuung"

z.B. Atome (aber: Quanteneffekte ?!)

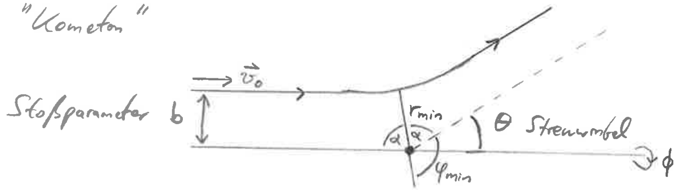
→ klass. Aussagen bleiben in guter Näherung richtig

→ Beschreibung von Streuung dieselbe ; hier "Sprache lernen"

- betrachte ungebundene Bewegung (§1.5, S.18)

((anziehende Kraft, $E \geq 0$; abstoßende Kraft, $E > 0$))

aus Sicht des "Kometen"



⇝ Stöße bzw. Streuung

wichtig z.B. in Teilchenphysik: Positron-Proton-Streuung etc.

→ Strukturuntersuchung !

⇝ aus Skizze: $2\alpha + \theta = \pi$, $\alpha + \varphi_{min} = \pi$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\theta = 2\varphi_{min} - \pi}}$

⇝ Annahme: $\lim_{r \to \infty} V(r) = 0$

$\Rightarrow$ $E = T + V = \frac{\mu}{2} v_0^2$, $L = |\mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = \mu b v_0$

damit wird ((allg. Lsg §1.5, S.16: $\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2} \frac{L}{\sqrt{2\mu[E - V(r')] - \frac{L^2}{r'^2}}}$))

$$-(\varphi_{min} - \pi) = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \frac{\mu b v_0}{\sqrt{2\mu\left[\frac{\mu}{2} v_0^2 - V(r)\right] - \left(\mu b v_0 / r\right)^2}}$$

$\dot{\varphi} < 0$

$\varphi(r \to \infty) = \varphi_{min}$

$\varphi(r_{min}) = \pi$

$$= \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \frac{b}{\sqrt{1 - \frac{2V(r)}{\mu v_0^2} - \frac{b^2}{r^2}}}$$

r_{min} aus $\frac{2V(r_{min})}{\mu v_0^2} + \frac{b^2}{r_{min}^2} \overset{!}{=} 1$

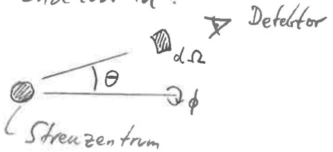
- definiere einen Streu- oder Wirkungsquerschnitt

Anfangszustand: z.B. Teilchenstrahl in Kern/Teilchenphysik

→ alle T. haben gleichen Impuls $\vec{p}$

→ T. sind gleichförmig über Querschnitt A verteilt

Endzustand:



def Wirkungsquerschnitt σ: $\underbrace{N_s}_{\text{\# der gestreuten Teilchen}} = \frac{\sigma}{A} \underbrace{N_{ein}}_{\text{\# der Teilchen im Strahl}}$

$\Leftrightarrow$ $\sigma \equiv \frac{N_s}{N_{ein}/A} = \frac{(N_s/\text{Zeit})}{\left(\frac{N_{ein}}{A \cdot \text{Zeit}}\right)} = \frac{\text{Ereignisrate}}{\underbrace{\text{Teilchenstromdichte}}_{\text{oft "Luminosität"}}}$

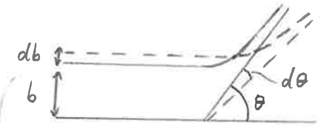
→ zähle (Detektor) gestreute Teilchen mit $\theta_1 < \theta < \theta_2$,

schreibe $\sigma = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)$ ← "differentieller Wirkungsquerschnitt"

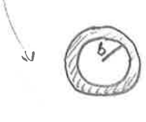
((können bei ϕ-Abhängigkeit noch $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ definieren, $d\Omega \equiv d\phi\, d\theta \sin\theta$))

- für $E, V(r)$ gegeben $\Rightarrow$ θ ist Funktion von b (s. S. 19)

(($\theta = 2\varphi_{min} - \pi = \pi - 2(\pi - \varphi_{min}) = \pi - 2\int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \frac{b}{\sqrt{\ \ }}$, r_{min} aus $\sqrt{\ \ } = 0$))



alle T. mit Stoßparameter zwischen $b, b+db$ werden in den Winkelbereich zwischen $\theta, \theta - d\theta$ gestreut.



Flächenelement $d\sigma = 2\pi b\, db = 2\pi b \left|\frac{db}{d\theta}\right| d\theta$

$\Leftrightarrow$ $\frac{d\sigma}{d\theta} = 2\pi b \left|\frac{db}{d\theta}\right|$

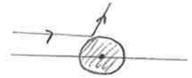
Bsp.: (Streuung harter Kugeln)

sei $V(r) = \begin{cases} \infty & \text{für } r<R \\ 0 & \text{für } r \geq R \end{cases}$

((z.B. zwei Billiardkugeln, Masse m, Radius a $\Rightarrow \mu = \frac{m}{2}$, $R = 2a$))

betrachte $b < R$ (da keine Streuung / Stöße bei $b > R$)

$r_{min} = R$:



$$\Rightarrow \Theta = \pi - 2\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \frac{b}{\sqrt{1-b^2/r^2}} \qquad \text{Subst: } u = \frac{b}{r},\ du = -\frac{b\,dr}{r^2}$$

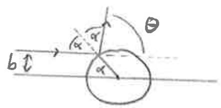
(s. Bsp 5.17)

$$= \pi + 2\int_{b/R}^0 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pi - 2\left[\arccos u\right]_{u=b/R}^0 = \cancel{\pi} - \cancel{2\frac{\pi}{2}} + 2\arccos\frac{b}{R}$$

$$\Rightarrow \underline{b(\Theta) = R\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)}$$

$$\rightsquigarrow \frac{d\sigma}{d\Theta} = 2\pi b\left|\frac{db}{d\Theta}\right| = 2\pi R\cos\frac{\Theta}{2}\ \frac{R}{2}\sin\frac{\Theta}{2} = \frac{\pi R^2}{2}\sin\Theta$$

Bem
- haben also (totalen) Wirkungsquerschnitt
  $$\sigma = \int_0^\pi d\Theta\ \frac{d\sigma}{d\Theta} = \frac{\pi R^2}{2}\left[-\cos\Theta\right]_{\Theta=0}^\pi = \pi R^2$$ ✓✓ sinnvoll!
- $b(\Theta)$ hätten wir auch geometrisch herleiten können,
  $b = R\sin\alpha$, $2\alpha + \Theta = \pi$



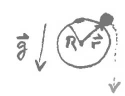
Fazit Streuung:
- haben nur $E, \vec{p}$ - Erhaltung benutzt
  $\rightsquigarrow$ elementare Herleitung ; weitreichende Gültigkeit
- Erhaltungssätze gelten auch in Quantenmechanik
  $\rightsquigarrow$ Einzelheiten des Streuprozesses unwichtig
  nur einlaufende / auslaufende T. von Interesse
  betrachte Umgebung des Streuzentrums als "black box"
- Herleitung ist also auch für z.B. Neutron-Proton-Streuung gültig
  (für kleine E ; haben relativistische Effekte vernachl.)

2. Lagrange-Formalismus

→ s. z.B. [Goldstein / Poole / Safko, §2]

bisher: sehr einfache Systeme
$\rightsquigarrow$ Koordinaten, Kräfte $\rightsquigarrow$ Newton II $\rightsquigarrow$ Lsg
(wir hatten meist holonome Randbedingungen vorliegen:
Bewegung eingeschränkt durch Gleichungen $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, t) = 0$
→ konnten dies durch verallgemeinerte Koordinaten,
z.B. Polarkoordinaten, Winkel etc. berücksichtigen)

oft: Systeme mit komplizierteren Einschränkungen
z.B. nichtholonome Randbedingungen
(Bsp: Kugel rutscht von Kugel herunter $\vec{r}^2 - R^2 \geq 0$



)
(Bsp: Körper rollt, ohne zu rutschen $\dot{\vec{r}} = 0$ am Berührungspunkt)

$\rightsquigarrow$ Zwangskräfte a priori unbekannt

→ Umformulierung der Mechanik, die ohne Zwangskräfte in den Bwgln. auskommt

2.1 Variationsrechnung

(brauchen wir für diese Umformulierung ;
die Leitidee ist (s. §2.2) die folgende)

Beh.: Massenpkt. bewegt sich via $m\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}V$

$\Leftrightarrow$ Massenpkt. bewegt sich auf Bahnkurve, welche den Wert eines Integrals ("Wirkung") extremiert
(meist: minimiert)

→ benötigen neue Methode zur mathematischen Formulierung dieses Prinzips: <u>Variationsrechnung</u>

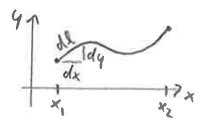
Funktion: Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto y(x)$

<u>Funktional</u>: Abbildung $V \to \mathbb{R}$; $y \mapsto F[y]$

↑ Funktionenraum mit best. Eigenschaften, meist: reell, stetig, diff'bar

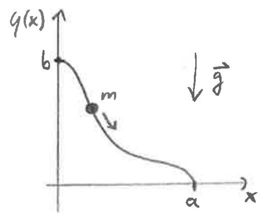
<u>Bsp</u>:

- $F[y] = y(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, y(x)\, \delta(x-x_0)$
- $F[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(y(x), y'(x), x)$ mit Funktion f
- Länge einer Bahnkurve



$$l = \int dl = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + (y'(x))^2} = l[y]$$

- <u>Brachistochronen</u>-Problem
  kürzeste (Lauf-) Zeit [im homogenen Gravitationsfeld]
  (Johann Bernoulli, 1667-1748 → Variationsrechnung)



Massenpunkt ruht am Anfang;
reibungsfreie Bewegung von $b \to a$

$$t_{ba} = \int dt = \int \frac{dl}{v} = \int_0^a dx \frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{v(x)}$$

aus E-Erhaltung: $\frac{1}{2} m v^2 = mg(b-y)$
$\Leftrightarrow v = \sqrt{2g(b-y)}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a dx \frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{b-y(x)}} = t_{ba}[y]$$

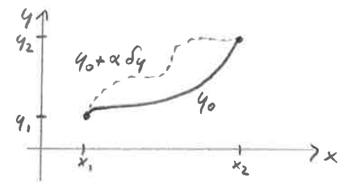
<u>Extremierung</u> eines Funktionals $F[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(y, y', x)$

<u>Ann.</u>: sei die Funktion y_0 ein Extremum (z.B. Minimum) von $F[y]$:
$F[y] \geq F[y_0]$ $\forall$ Funktionen y mit $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$

sei $\delta y(x)$ eine beliebige (stetige, diff'bare) Fkt mit $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$

→ betrachte $F[y_0 + \alpha \delta y]$ als Funktion von $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \partial_\alpha F[y_0 + \alpha \delta y]\big|_{\alpha=0} \overset{!}{=} 0 \quad (\forall \delta y)$$

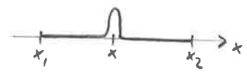


es ist
$$\partial_\alpha F\big|_{\alpha=0} = \partial_\alpha \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(y_0 + \alpha \delta y, y_0' + \alpha \delta y', x)\big|_{\alpha=0}$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\delta y (\partial_y f) + \underbrace{\delta y' (\partial_{y'} f)}_{= \partial_x (\delta y (\partial_{y'} f)) - \delta y\, \partial_x \partial_{y'} f} \right]_{y=y_0}$$

(totale Abl.: $\frac{d}{dx}$)

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx\, \delta y \left[\partial_y f - \partial_x \partial_{y'} f \right] + \underbrace{\left(\delta y (\partial_{y'} f) \right)\Big|_{x=x_1}^{x_2}}_{=0\text{, da } \delta y(x_{1,2}) = 0} \overset{!}{=} 0$$

muss (s.o.) für alle $\delta y(x)$ gelten;
z.B. insbesondere für solche:



$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0} \quad \forall x \text{ , } \underline{\text{Euler-Gleichung}}$$

((oder $(\partial_y - \partial_x \partial_{\partial_x y}) f = 0$))

<u>Verallgemeinerung</u>: für N Funktionen y_n, $n = 1, .., N$
bekommt man N Gleichungen $\frac{\partial f}{\partial y_n} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_n'} = 0$ $\forall x, n$

(<u>Beweis</u>: wähle $\delta y_n \neq 0$ nur für bestimmten Wert n, etc.)

Bsp.: Brachistochronen-Problem (s. S. 23: $f = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{b-y}}$)

$\partial_y f = +\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{(b-y)^{3/2}}$, $\partial_{y'} f = \frac{1}{2}\frac{2y'}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{b-y}}$, $\partial_x \partial_{y'} f = $ lang...

aber $\partial_x \left[y'\partial_{y'} f - f \right] = y''\partial_{y'} f + y'\partial_x\partial_{y'} f - y'\partial_y f - y''\partial_{y'} f \underbrace{(-f')}_{f(y,y',\cancel{x})}$

$= y''\cancel{(\partial_{y'} f - \partial_{y'} f)} + y'(\partial_x \partial_{y'} f - \partial_y f)$

$= 0$ wegen Euler-Glg.

$\Rightarrow$ $[\ldots]$ ist eine Konstante (in x)

folgt (s.o.), da f nicht explizit von x abhängt!

($[\ldots]$ wird oft als erstes Integral der Euler-Glg bezeichnet)

$\Leftrightarrow \frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{b-y}} - \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{b-y}} \cdot \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{1+(y')^2}} = \text{const.}$

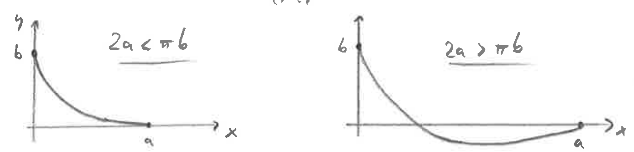
$\Rightarrow \sqrt{1+(y')^2}\sqrt{b-y} = -\frac{1}{\text{const.}} \quad \Rightarrow \quad (1+(y')^2)(b-y) = \frac{1}{(\text{const.})^2} \equiv 2A$

Bem.: Lsg ist Zykloide:

$x(\varphi) = A(\varphi - \sin\varphi)$, $y(\varphi) = b + A(\cos\varphi - 1)$

((check: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\varphi}{dx/d\varphi} = \frac{-A\sin\varphi}{A(1-\cos\varphi)}$,

$(1+(y')^2)(b-y) = \frac{(1-c)^2+s^2}{(1-c)^2} A(1-c) = 2A$ ✓))



$\rightsquigarrow$ Darstellung z.B. via Mathematica,

Parametric Plot[{ A(φ−sin φ), b+A(cos φ−1)}, {φ, 0, 2π}]

wählen, z.B. = 1

2.2 Prinzip der kleinsten Wirkung

bzw. (Fermat-, Maupertius-, d'Alembert-) Hamilton-Prinzip

Beschreibe ein System (mit s "Freiheitsgraden")

durch verallgemeinerte Koordinaten (müssen nicht kartesisch sein) $q_1, \ldots, q_s$.

(z.B.: N Massenpunkte , $s = 3N$

$\{q_i\} = \{x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_N, y_N, z_N\}$

oder $\{q_i\} = \{r_1, \theta_1, \varphi_1, r_2, \theta_2, \varphi_2, \ldots, r_N, \theta_N, \varphi_N\}$)

Die Zeitableitungen $\dot q_1, \ldots, \dot q_s$ heißen verallgemeinerte Geschwindigkeiten.

Defs $q \equiv (q_1, \ldots, q_s)$, $\dot q \equiv (\dot q_1, \ldots, \dot q_s)$

$L(q, \dot q, t) \in \mathbb{R}$ Lagrange-Funktion

$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q, \dot q, t)$ Wirkung

((vgl. § 2.1, mit $\begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ f \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} t \\ q(t) \\ L \end{pmatrix}$))

Das Hamiltonsche Prinzip: S ist extremal , bzw $\delta S = 0$

$\rightsquigarrow$ mit Euler-Glg folgen dann die

Euler-Lagrange-Gleichungen $\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0}$ $\forall n$

Bem.:
- dies sind Dgl'n 2. Ordnung (wie Newton II!)
- L ist nicht eindeutig:

sei $\tilde L \equiv L + \frac{d}{dt} g(q(t), t)$

dann $\tilde S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \tilde L = S + \int_{t_1}^{t_2} dt\, \partial_t g = S + g(q_2, t_2) - g(q_1, t_1)$

aber bei Variation $q \to q + \delta q$, $\delta q(t_1) = 0 = \delta q(t_2)$

bleiben die Randterme unverändert

$\Rightarrow$ haben keinen Einfluss auf Euler-Lagrange-Gln!

- bisher keine Annahmen über die Form von L.
  - $\rightsquigarrow$ sehr allg. Prinzip / haben noch viel Wahlfreiheit
  - $\rightsquigarrow$ Massenpunkte in konservativem Kraftfeld:

wähle $L \equiv T - V$ (mit $\vec{r}_n \leftrightarrow q$, $\dot{\vec{r}}_n \leftrightarrow \dot{q}$)

$$\overset{!}{=} \sum_n \frac{m_n}{2} \dot{\vec{r}}_n^{\,2} - V(\vec{r}_n)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n^i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_n^i} = m_n \dot{x}_n^i \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial x_n^i} = -\frac{\partial V}{\partial x_n^i}$$

(hier keine Summe über n)

(Euler-Lag.) $\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n^i} - \frac{\partial L}{\partial x_n^i} = m_n \ddot{x}_n^i + \frac{\partial V}{\partial x_n^i} = 0 \quad \forall n$

$\Leftrightarrow m_n \ddot{\vec{r}}_n = -\vec{\nabla}_n V$ (vgl. Behauptg S. 22)

$\rightsquigarrow$ Newton II folgt aus Extremierung der Wirkg $S = \int (T-V)$

2.3 Randbedingungen / Zwangsbedingungen

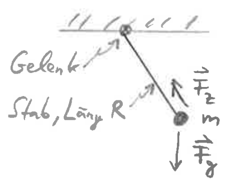
Einschränkung der Bewegung durch Gleichungen der Form

$$f_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, t) = 0 \quad , \quad \alpha = 1, \dots, k$$

(keine $\dot{\vec{r}}$) $\Rightarrow$ holonome Zwangsbedingungen (vgl. S. 22)

(("skleronom" / "rheonom" $\Leftrightarrow$ ohne / mit Zeitabhängigkeit))
starr / fließend

Bsp (Pendel)

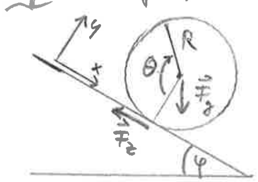


wähle Ursprung im Gelenk

Schwingung in (x,y)-Ebene

$$\left\{ \begin{matrix} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} f_1 = x^2 + y^2 - R^2 \\ f_2 = z \end{matrix} \right\}$$

Bsp (Reifen) Rollen auf schiefer Ebene mit Reibung



$$\{x = R\theta\} \Leftrightarrow \{f_1 = x - R\theta\}$$

$\rightsquigarrow$ Zwangskräfte $\vec{F}_z$ erzwingen die Rand/Zwangsbedingungen;
Behandlung mit Newtonschen Gesetzen kann sehr mühsam sein!

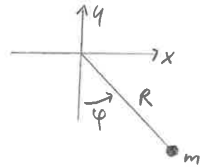
$\rightsquigarrow$ Im Lagrange-Formalismus geht man nach "Rezept" vor:

(a) Führe $s = 3N - k$ verallgemeinerte Koord. $q_1, \dots, q_s$ ein, welche die Konfigurationen des Systems parametrisieren, die die Zwangsbedingungen erfüllen

(b) Drücke die Lagrange-Funktion $L = T - V$ durch $q, \dot{q}$ aus; V enthält nur die Beiträge, die nicht Zwangskräfte verursachen

(c) Löse die Euler-Lagrange-Gln $\frac{\partial L}{\partial q_n} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}$, $n = 1, \dots, s$

Bsp (Pendel)



(a) $q \equiv \varphi$ $(s=1)$

$(x, y) = R(\sin\varphi, -\cos\varphi)$

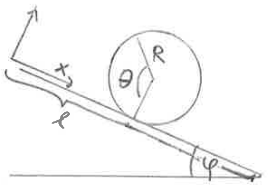
(b) $T = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} R^2 \dot{\varphi}^2 (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \frac{m}{2} R^2 \dot{\varphi}^2$

$V = mgy = -mgR\cos\varphi$

$\Rightarrow L = T - V = \frac{m}{2} R^2 \dot{\varphi}^2 + mgR\cos\varphi$

(c) $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgR\sin\varphi$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi}$ $\Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{g}{R}\sin\varphi$

<u>Bsp</u> (Reifen)



(a) $q \equiv x$; $\theta = x/R$

(b) $T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2 = m\dot{x}^2$ ← kin. E Drehung

kin. E Schwerpkt

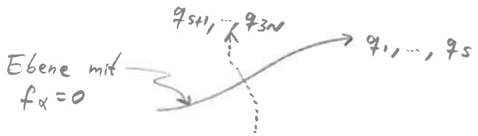
$V = mg(\ell - x)\sin\varphi$

$\Rightarrow L = T - V = m\dot{x}^2 - mg(\ell - x)\sin\varphi$

(c) $\frac{\partial L}{\partial x} = mg\sin\varphi$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x}$ $\Rightarrow$ $\ddot{x} = \frac{g}{2}\sin\varphi$

<u>Bem.</u>: • die (holonomen) Zwangskräfte sind also per 'Rezept' eliminiert

• zur Begründung des 'Rezepts':
schreibe alle 3N Koord. des Systems wie folgt:



es gilt $f_\alpha(q_1, \dots, q_s; q_{s+1} = 0, \dots, q_{3N} = 0) = 0$ $\forall\, \alpha = 1, \dots, k$

$\Rightarrow \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_n} = 0$ für $n = 1, \dots, s$

<u>def</u> $\tilde{L} \equiv L + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha f_\alpha$ (λ_α heißen <u>Lagrange-Multiplikatoren</u>)

betrachte $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}$ als neue Koord. ⇝ insgesamt $3N+k$ verallg. Koord.

dann folgt (EL ≡ Euler-Lagrange):

(1) EL mit λ_α $\Rightarrow$ $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \lambda_\alpha} = f_\alpha = \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\lambda}_\alpha} = 0$ ✓ ok

(2) EL mit $q_{s+1} \dots q_{3N}$ $\Rightarrow$ $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} - \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_n} = 0$, $n = s+1 \dots 3N$

⇝ ermöglicht die Bestimmung der λ_α.

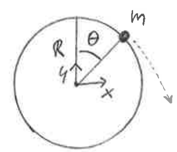
⇝ könnte daraus Zwangskräfte ablesen:

"$\frac{m_n}{2}\ddot{q}_n$" $+ \frac{\partial V}{\partial q_n} -$ Zwangskräfte $= 0$

(3) EL mit $q_1 \dots q_s$ $\Rightarrow$ $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0$, $n = 1, \dots, s$

((wegen $\partial_{q_n} f_\alpha(q_1 \dots q_s; 0 \dots 0) = 0$))

<u>Bsp</u>



Bei welchem Winkel θ_{escape} verlässt der Massenpunkt die Kugeloberfläche?

Koordinatenwahl: r, θ $\Rightarrow (x, y) = r(\sin\theta, \cos\theta)$

Zwangsbedingung: $f \equiv r - R = 0$ (auf Oberfläche)

$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$

$V = mgy = mgr\cos\theta$

$\Rightarrow \tilde{L} = T - V + \lambda f = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr\cos\theta + \lambda(r - R)$

(1) $f = 0$ $\Rightarrow$ $r = R$

(3) $\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta}$, $\frac{\partial V}{\partial \theta} = -mgR\sin\theta$ $\Rightarrow$ $\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\sin\theta$

(2) $\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial r} = 0$ $= \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - (mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + \lambda)$

betrachte (3)$\cdot\dot{\theta}$ $\Rightarrow$ $\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{g}{R}\frac{d}{dt}\cos\theta$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{g}{R}\cos\theta + \mathrm{const}_t$

AB $\dot{\theta} = 0$ bei $\theta = 0$ $\Rightarrow$ $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1 - \cos\theta)$

betrachte (2): $\dot{r} = 0$ (wegen $r = R$)

$\Rightarrow \lambda = -mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = mg(3\cos\theta - 2)$

Zwangskraft $= \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = \lambda = mg(3\cos\theta - 2)$

⇝ Massenpkt. verlässt Oberfläche wenn $\vec{F}_z = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ $\cos\theta_{escape} = \frac{2}{3}$

2.4 Symmetrien + Erhaltungssätze

→ wichtiger Vorteil des Lagrange-Formalismus (ggü. Newton): Zusammenhang zwischen Symm. ⇔ Erh. Sätzen verdeutlichen

- **Invarianz unter Zeittranslationen ⇒ Energieerhaltung**
  ((bzw. Homogenität der Zeit)

L hängt nicht explizit von t ab: $L = L(q, \dot{q})$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} L = \sum_n \Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_n}}_{= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right)} \dot{q}_n + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \left(\frac{d}{dt} \dot{q}_n\right) \Big)$$

wegen Euler-Lagrange Gln

$$= \frac{d}{dt} \left(\sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_n \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} E = 0 \quad \text{mit} \quad E \equiv \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_n - L$$

⇝ die so definierte Energie E ist also erhalten; stimmt dies mit der üblichen Def überein?

sei $L = T - V$, $T \equiv \frac{1}{2} \sum_{a,b} f_{ab}(q)\, \dot{q}_a \dot{q}_b$

$\left(T = \frac{1}{2} \sum_n m_n \dot{x}^2 \text{ ist Spezialfall} \right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} - \cancel{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_n}}^{\,0} = \partial_{\dot{q}_n} \frac{1}{2} \sum_{a,b} f_{ab}(q)\, \dot{q}_a \dot{q}_b$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{a,b} f_{ab}(q) \left(\delta_{an} \dot{q}_b + \dot{q}_a \delta_{bn} \right)$$

$$\Rightarrow E = \sum_n \dot{q}_n \frac{1}{2} \sum_{a,b} f_{ab}(q) \left(\delta_{an} \dot{q}_b + \dot{q}_a \delta_{bn} \right) - T + V$$

$$= \sum_{a,b} f_{ab}(q)\, \dot{q}_a \dot{q}_b - \frac{1}{2} \sum_{a,b} f_{ab}(q)\, \dot{q}_a \dot{q}_b + V = T + V \quad ✓ \text{ok}$$

- **räumliche Translationsinvarianz ⇒ (verallg.) Impulserhaltung**

L hängt nicht von einer bestimmten verallgemeinerten Koordinate q_i ab: $L = L(q_1, \dots, \cancel{q_i}, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$

⇝ dieses q_i nennt man zyklische Koordinate

L ist also invariant unter $q_i \to q_i + \ell$; $\quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

def $\quad p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ der zu q_i kanonisch konjugierte Impuls

damit ist $\quad \dot{p}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \overset{\text{(Euler-Lagrange)}}{=} \frac{\partial L}{\partial q_i} \overset{(q_i \text{ zyklisch})}{=} 0$

⇝ kanonisch konj. Impuls ist erhalten!

Bsp: betrachte N Massenpunkte mit Zentralkräften $V = \sum_{a,b} V_{ab}(\vec{r}_a - \vec{r}_b)$

⇝ wähle verallg. Koord.: $\vec{r}_1$, $\vec{r}_{a1} \equiv \vec{r}_a - \vec{r}_1$ $(a = 2, \dots, N)$

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \sum_{a=2}^{N} \frac{m_a}{2} \left(\dot{\vec{r}}_1 + \dot{\vec{r}}_{a1} \right)^2 - \sum_{a,b=2}^{N} V_{ab}(\vec{r}_{a1} - \vec{r}_{b1})$$

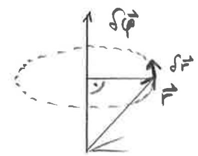
$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_1^{\,i}} = m_1 \dot{r}_1^{\,i} + \sum_{a=2}^{N} m_a \left(\dot{r}_1^{\,i} + \dot{r}_{a1}^{\,i} \right) = m_1 \dot{r}_1^{\,i} + \sum_{a=2}^{N} m_a \dot{r}_a^{\,i}$$

$= p^i_{\text{Gesamt}}$ erhalten, da $\vec{r}_1$ zyklisch: $L(\cancel{\vec{r}_1})$

- **Isotropie des Raumes ⇒ Drehimpulserhaltung**
  (d.h. Invarianz unter Drehungen

betrachte kleine Drehung

$\delta \vec{r} = \delta \vec{\varphi} \times \vec{r}$



(vgl. §1.3, S. 9: $\dot{\vec{e}} = \vec{\omega} \times \vec{e}$)

$$0 = \delta L \overset{}{=} L(\vec r + \delta\vec r, \dot{\vec r} + \delta\dot{\vec r}, t) - L(\vec r, \dot{\vec r}, t)$$

$$= \sum_{n,i}\Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial x_n^i}}_{\overset{(EL)}{=} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot x_n^i} = \dot p_n^i} \delta x_n^i + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot x_n^i}}_{= p_n^i} \delta \dot x_n^i \Big)$$

$$= \sum_n \Big(\dot{\vec p}_n \cdot \delta\vec x_n + \vec p_n \cdot \delta\dot{\vec x}_n \Big) = \frac{d}{dt}\sum_n \vec p_n \cdot \delta\vec x_n$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_n \vec p_n \cdot (\delta\vec\varphi \times \vec r_n) \overset{\sim}{=} \frac{d}{dt}\sum_n \delta\vec\varphi \cdot (\vec r_n \times \vec p_n)$$

Spatprodukt zyklisch vertausch.

$$= \delta\vec\varphi \cdot \frac{d}{dt}\sum_n \vec r_n \times \vec p_n \qquad \forall \text{ (zeitunabh.) Drehungen } \delta\vec\varphi$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\sum_n \vec r_n \times \vec p_n = \dot{\vec L}_{Gesamt} = 0$$

$\rightsquigarrow$ all diese Erhaltungssätze sind Spezialfälle des <u>Noether-Theorems:</u>
(hier: qualitative Herleitung) [Emmy Noether, 1915]

- beschreibe globale Invarianzen mit Hilfe von Generatoren (Q_n) einer Koord.-Transformation in lokaler Form,

$$q_n \to q_n' \equiv q_n + \varepsilon Q_n \quad , \quad \varepsilon \ll 1 .$$

- def. $\delta L \equiv L(q', \dot q', t) - L(q, \dot q, t) = \varepsilon \frac{df}{dt} \leftarrow$ (erlaubt, vgl. S. 26)

aber $\delta L = \sum_n \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_n}}_{\overset{(EL)}{=} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_n}} \varepsilon Q_n + \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot q_n} \varepsilon \dot Q_n = \varepsilon \frac{d}{dt}\sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot q_n} Q_n$

also ist $\varepsilon \frac{d}{dt}\Big[\underbrace{f - \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot q_n} Q_n}_{\equiv J \quad \text{Noether-Strom}}\Big] = 0 \quad \forall \varepsilon$

<u>Bsp:</u> (räumliche Translationen) sei q_a zyklisch $\Rightarrow Q_n = \delta_{na}$, $\dot Q_n = 0$, $f = 0$

$$\Rightarrow J = -\sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot q_n}\delta_{na} = -p_a$$

<u>Bsp:</u> (zeitliche Translationen) $q_n' = q_n(t+\varepsilon) = q_n + \varepsilon \dot q_n \Rightarrow Q_n = \dot q_n$

es gilt $\delta L = L(q', \dot q') - L(q, \dot q) = \varepsilon \frac{dL}{dt} \Rightarrow f = L$

$$\Rightarrow J = L - \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot q_n}\dot q_n = -E$$

<u>Bem.</u>

- Erhaltungsgrößen sind <u>additiv</u>:
  für $L = L_A + L_B$ (A, B: nicht miteinander wechselwirkende Untersysteme)
  folgt $J = J_A + J_B$ (da J linear in L, s.o.)

- betrachte <u>Boosts</u> (vgl. §1.3, S. 9):

$$q_n' = q_n - \varepsilon u_n t \quad \Rightarrow \quad Q_n = -u_n t \quad , \quad \dot q_n' = \dot q_n - \varepsilon u_n$$

  f ist nun nicht-trivial;
  Bsp: freie Massenpunkte

$$\delta L = \sum_n \frac{m_n}{2}(\dot q_n')^2 - \sum_n \frac{m_n}{2}\dot q_n^2$$

$$= \sum_n \frac{m_n}{2}\left(-2\varepsilon u_n \dot q_n + \varepsilon^2 u_n^2\right) \overset{!}{=} \varepsilon \frac{df}{dt} + O(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow f = -\sum_n m_n u_n q_n$$

$$\Rightarrow J = f - \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot q_n} Q_n = \sum_n\left(-m_n u_n q_n - m \dot q_n(-u_n t)\right)$$

$$= \sum_n m u_n (\dot q_n t - q_n)$$

$$\rightsquigarrow J = \text{const} \quad (\dot J = 0) \text{, aber abhängig von Anfangs-Ortsvektor}$$

- für eine <u>allgemeine Herleitung</u> des Noether-Theorems (s. z.B. [Goldstein/Poole/Safko, §13.7)
  betrachtet man auch $t \to t' = t + \varepsilon X$,

$$q_n(t) \to q_n'(t') = q_n(t) + \varepsilon Q_n \quad \left(\left(q_n'(t') - q_n(t) \neq q_n'(t) - q_n(t) \right)\right).$$

  Ausgangspunkte der allg. Herleitung sind
  <u>Forminvarianz</u> $L'(q'(t'), \dot q'(t'), t') = L(q'(t'), \dot q'(t'), t')$
  <u>Skaleninvarianz</u> $S' = \int_{t_1'}^{t_2'} dt'\, L'(q'(t'), \dot q'(t'), t') = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q(t), \dot q(t), t)$
  und es folgt der allg. Noether-Strom

$$J = \Big(\sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot q_n}\dot q_n - L\Big) X - \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot q_n} Q_n$$

2.5 Beschreibung dissipativer Systeme (zerstreuend)

bisher: EL Gln $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0 \quad , \quad n = 1, \dots, s$

beschreibt mit $L = T - V$ die Bewegung von Massenpunkten unter dem Einfluss konservativer Kräfte

berücksichtige auch nichtkonservative Kräfte $F_n^{(nc)}$

via $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = F_n^{(nc)}$$

(vgl. §1.2: verrichten Arbeit entlang geschloss. Kurven)

wichtigste Klasse: Reibungskräfte

sind meist proportional zur Geschwindigkeit, $F_n^{(nc)} = -k_n \dot q_n$

((keine Reibung bei $\vec v = 0$; Taylor für kleine $\vec v$ startet linear))

def $\mathcal{F} = \frac{1}{2}\sum_n k_n \dot q_n^2$ Rayleighsche Dissipationsfunktion

dann ist $F_n^{(nc)} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot q_n}$

also $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot q_n}$$

Bem.:
- diese Variante der EL Gln folgt nicht aus einem Wirkungsprinzip; kann nicht 'first principle' sein
- bekommen Bwgln aus zwei skalaren Funktionen $L, \mathcal{F}$
- kartesische Reibungskräfte $\vec F_a^{(nc)}$ $(a = 1..N)$ umrechnen in generalisierte Reibungskräfte $F_n^{(nc)}$:

$$F_n^{(nc)} = \sum_{a=1}^{N} \vec F_a \cdot \frac{\partial \vec r_a}{\partial q_n}$$

meist ist $\vec F_a^{(nc)} = -h_a(v_a)\frac{\vec v_a}{v_a} \quad , \quad a = 1..N \quad , \quad v_a = |\vec v_a|$

((z.B. Haft-/Gleit-/Roll-Reibung: $h = const$
in Fluiden: $h \sim v$ (kleine v), $h \sim v^2$ ($\to$ Wirbel, Turbulenzen)))

dann ist $$\mathcal{F} = \sum_{a=1}^{N} \int_0^{v_a} dv_a \, h_a(v_a)$$

3. Wichtige Anwendungen

→ zu den wichtigsten Anwendungen der Mechanik gehören

- Zentralkraftbewegungen:
  Planeten, Satelliten; einige (der wenigen) exakt lösbaren Probleme
  klassische Streutheorie
- Bewegung starrer Körper
  Kreisel, Trägheitsmomente, Drehbewegungen
  wichtig im Maschinenbau: rotierende Maschinen(teile), Unwuchten, ..
- Schwingungen
  (a) kleine/lineare: harmonischer Oszillator ("wichtigstes" Modell der Physik)
  Elektrotechnik; Kontinuum → Wellengleichungen
  (b) große/nichtlineare: Näherungsmethoden, Störungsrechnung
  Architektur – Resonanzkatastrophen

3.1 Kleine Schwingungen

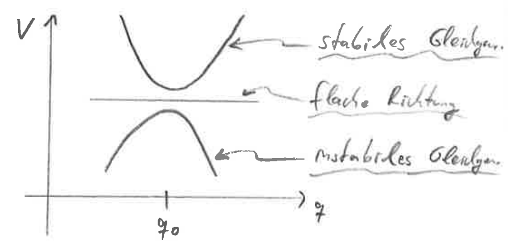
→ sind oft interessiert am Verhalten von Systemen "in der Nähe" ihrer Ruhelage

Sei z.B. q_0 eine Lsg der EL Gln: $\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q}\right)_{q=q_0} = 0$

⇝ gibt es Lsn "in der Nähe" von q_0?

Sei q_0 insbesondere die Lsg in der Ruhelage: $\dot q_0 = 0$

⇝ was passiert bei kleinen Auslenkungen aus der Ruhelage?



- betrachte einen Freiheitsgrad: $s=1$

sei $L \equiv \frac{1}{2} f(q)\dot{q}^2 - V(q)$

das Potential V habe Extremum bei q_0, d.h. $V'(q_0)=0$

diese Lsg sei der Ruhezustand, d.h. $\dot{q}_0 = 0$

$\rightsquigarrow$ schreibe nun $q = q_0 + \delta q \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \delta\dot{q}$

entwickle bis 2. Ordnung in kleiner Auslenkung δq

$$L = \frac{1}{2} f(q_0)\, \delta\dot{q}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\delta q\, f'(q_0)\, \delta\dot{q}^2}_{\text{ist schon 3. Ordnung!}} + \dots$$

$$- V(q_0) - \delta q \underbrace{V'(q_0)}_{=0} - \frac{1}{2}\delta q^2 V''(q_0) + O(\delta q^3)$$

$$\approx \frac{1}{2} f(q_0)\, \delta\dot{q}^2 - V(q_0) - \frac{1}{2} V''(q_0)\, \delta q^2$$

$\rightsquigarrow$ Euler-Lagrange Gln für $\delta q, \delta\dot{q}$

$$0 = \left(\partial_t \partial_{\delta\dot{q}} - \partial_{\delta q}\right) L = f(q_0)\, \delta\ddot{q} + V''(q_0)\, \delta q$$

$$\Leftrightarrow \quad \delta\ddot{q} = -\frac{V''(q_0)}{f(q_0)}\, \delta q \qquad \underline{\text{harmonischer Oszillator}} \quad (\text{H.O.})$$

(a) $\frac{V''(q_0)}{f(q_0)} > 0$: def $\frac{V''(q_0)}{f(q_0)} \equiv \omega^2$, $\underline{\delta\ddot{q} = -\omega^2 \delta q}$,

allg Lsg $\underline{\delta q = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)}$

ist beschränkt bzw. stabil

(b) $\frac{V''(q_0)}{f(q_0)} < 0$: def $\frac{V''(q_0)}{f(q_0)} \equiv -\kappa^2$, $\underline{\delta\ddot{q} = \kappa^2 \delta q}$,

allg Lsg $\underline{\delta q = A e^{\kappa t} + B e^{-\kappa t}}$

ist unbeschränkt bzw. instabil

- betrachte mehrere Freiheitsgrade: $s>1$

sei $L \equiv \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^{s} f_{ab}(q)\, \dot{q}_a \dot{q}_b - V(q)$

Ruhelage sei bei $q_0 = (q_{10}, \dots, q_{s0})$, d.h. $\partial_{q_a} V(q_0) = 0 \quad \forall a = 1..s$

$\rightsquigarrow$ $\delta q_a = q_a - q_{a0}$, Entwicklung zur 2. Ordnung in δq_a

$$L = \frac{1}{2}\sum_{a,b} \underbrace{\boxed{f_{ab}(q_0)}}_{= m_{ab} = m_{ba}}\, \delta\dot{q}_a \delta\dot{q}_b - V(q_0) - \frac{1}{2}\sum_{a,b} \underbrace{\boxed{\frac{\partial^2 V(q_0)}{\partial q_a \partial q_b}}}_{\equiv k_{ab} = k_{ba}}\, \delta q_a \delta q_b + O(\delta q^3)$$

(symmetrisch)

(wegen $\sum_{a,b} = \frac{1}{2}\sum_{a,b} + \frac{1}{2}\sum_{b,a}$)

schreibe Summen als Matrixmultiplikation: $\delta q = \begin{pmatrix} \delta q_1 \\ \vdots \\ \delta q_s \end{pmatrix}$

$m = (m_{ab})$, $k = (k_{ab})$, $\delta q^T = (\delta q_1, \dots, \delta q_s)$

$$= \frac{1}{2}\delta\dot{q}^T m\, \delta\dot{q} - \frac{1}{2}\delta q^T k\, \delta q - \underbrace{V(q_0)}_{} + O(\delta q^3)$$

irrelevant für EL-Gln! (Konstante)

$\rightsquigarrow$ lin. Algebra: symmetrische Matrizen (wie m, k)

können mit orthogonalen Transformationen diagonalisiert werden;

aber geht das auch gleichzeitig?

(1) $m_D \equiv \begin{pmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_s \end{pmatrix} = R\, m\, R^T \quad , \quad R^T = R^{-1}$

$\Leftrightarrow \quad m = R^T m_D R \qquad (\text{da } R^T R = \mathbb{1})$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{1}{2}\delta\dot{q}^T R^T m_D R\, \delta\dot{q} - \frac{1}{2}\delta q^T k\, \delta q$$

def. $R\,\delta q \equiv \delta q' \quad \Leftrightarrow \quad \delta q = R^T \delta q'$

$$= \frac{1}{2}\delta\dot{q}'^T m_D\, \delta\dot{q}' - \frac{1}{2}\delta q'^T R k R^T \delta q'$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{s} m_a (\delta\dot{q}_a')^2 - \frac{1}{2}\delta q'^T R k R^T \delta q'$$

(2) neue Variablen: def $Q_a' \equiv \sqrt{m_a}\, \delta q_a'$

$\Rightarrow Q' = m_D^{\frac{1}{2}} \delta q'$, wobei $m_D^{\frac{1}{2}} \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{m_s} \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \delta q' = m_D^{-\frac{1}{2}} Q'$

$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \dot{Q}'^T \dot{Q}' - \frac{1}{2} Q'^T \underbrace{\boxed{(m_D^{-\frac{1}{2}})^T R k R^T m_D^{-\frac{1}{2}}}}_{\equiv K} Q'$

(3) die Matrix K ist auch symmetrisch, denn

$K^T = (m_D^{-\frac{1}{2}})^T R k^T R^T m^{-\frac{1}{2}} \stackrel{!}{=} K$ (da k symmetrisch, d.h. $k^T = k$)

K kann also diagonalisiert werden

$K = \tilde{R}^T \tilde{k}_D \tilde{R}$ mit $\tilde{k}_D \equiv \begin{pmatrix} \tilde{k}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{k}_s \end{pmatrix}$

def $\tilde{R} Q' \equiv Q \quad \Leftrightarrow \quad Q' = \tilde{R}^T Q$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \dot{Q}'^T \underbrace{\mathbb{1}}_{=\tilde{R}^T\tilde{R}} \dot{Q}' - \frac{1}{2} Q'^T \underbrace{K}_{\tilde{R}^T \tilde{k}_D \tilde{R}} Q'$$

$$= \frac{1}{2} \dot{Q}^T \dot{Q} - \frac{1}{2} Q^T \tilde{k}_D Q$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{s} \left(\dot{Q}_a^2 - \tilde{k}_a Q_a^2 \right)$$

$\rightsquigarrow$ kleine Schwingungen werden von s unabhängigen H.O.'s beschrieben! (vgl. S. 37)

(a) $\tilde{k}_a > 0$: Schwingung mit Eigenkreisfrequenz $\omega_a = \sqrt{\tilde{k}_a}$

(b) $\tilde{k}_a < 0$: Instabilität der Ruhelage !
(negative Krümmung des Potentials in dieser Richtg)

(c) $\tilde{k}_a = 0$: die Koordinate Q_a ist zyklisch
(die entsprechende Richtung ist "flach")
$\Rightarrow$ einfache Translationsbewegung in dieser Koordinate : $Q_a = Q_a^0 + \dot{Q}_a^0 t$

Hauptachsentrafo

$H = H^T$ //

$\det(H - \lambda \mathbb{1}) \stackrel{!}{=} 0$

(($\mathrm{Sp} H = \lambda_1 + \lambda_2$ //))

$(H - \lambda_i \mathbb{1}) \vec{EV}_i \stackrel{!}{=} 0$

(($\vec{EV}_i \cdot \vec{EV}_j = \delta_{ij}$ //))

$H = R^T H_{diag} R$

$R = \begin{pmatrix} -\vec{EV}_1- \\ -\vec{EV}_2- \end{pmatrix}$

Bsp.: (zwei gekoppelte Oszillatoren)

betrachte zwei identische 1-dim Systeme (Eigenkreisfrequenz ω_0), durch Ww. gekoppelt:

$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - V$, $V = \frac{1}{2}\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) + \alpha x_1 x_2$
$= \frac{1}{2} x^T \begin{pmatrix} \omega_0^2 & \alpha \\ \alpha & \omega_0^2 \end{pmatrix} x$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

kinetische E ist bereits diagonal $\rightsquigarrow$ bei Schritt (3) beginnen:

Eigenwerte ? $\det \begin{pmatrix} \omega_0^2 - \tilde{k}_i & \alpha \\ \alpha & \omega_0^2 - \tilde{k}_i \end{pmatrix} = (\omega_0^2 - \tilde{k}_i)^2 - \alpha^2 \stackrel{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \omega_0^2 - \tilde{k}_i = \pm \alpha$

$\Rightarrow \tilde{k}_{1/2} = \omega_0^2 \mp \alpha$ Eigenkreisfreq. des gekoppelten Systems

($\tilde{k}_{1/2} > 0$ für $\alpha < \omega_0^2$)

Eigenvektoren ? $\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \tilde{k}_i & \alpha \\ \alpha & \omega_0^2 - \tilde{k}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\alpha & \alpha \\ \alpha & \pm\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{EV}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{EV}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Diagonalisierung : $\tilde{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

((denn: $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0^2 - \alpha & 0 \\ 0 & \omega_0^2 + \alpha \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0^2 - \alpha & -\omega_0^2 + \alpha \\ \omega_0^2 + \alpha & \omega_0^2 + \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0^2 & \alpha \\ \alpha & \omega_0^2 \end{pmatrix}$ //))

def Normalkoordinaten : $Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \equiv \tilde{R} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \tilde{R}^T Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ Lsg: $x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ Q_1(t) + Q_2(t) \} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ A \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha}\, t + B)$
$+ C \cos(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha}\, t + D) \}$

((modulierte Oszillation: 

wegen $\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$))

3.2 gedämpfte, erzwungene Schwingungen

→ mehr zum 1-dim harmonischen Oszillator

häufig werden Schwingungen erzwungen (äußere treibende Kraft); die meisten Oszillatoren sind gedämpft (Reibung)

Bewgl $\boxed{m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F(t)}$; $x(t) = ?$

$F(t)$: antreibende Kraft; nicht konservativ

$k>0$; von Feder; oder Pendel, $\sin x \approx x$ etc.

$\gamma \geq 0$, Dämpfungskonstante

(a) homogene Lsg: $\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \left(\omega_0 \equiv \sqrt{k/m},\ \tau \equiv \frac{m}{\gamma}\right)$

Ansatz $x_{hom} = A e^{i\lambda t} \Rightarrow \left(-\lambda^2 + \frac{i\lambda}{\tau} + \omega_0^2\right) A e^{i\lambda t} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_{1/2} = \frac{i}{2\tau} \pm \omega, \quad \omega \equiv \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{(2\tau\omega_0)^2}}$

$\Rightarrow x_{hom}(t) \overset{\text{reell}}{=} e^{-\frac{t}{2\tau}} \left(A e^{i\omega t} + A^* e^{-i\omega t}\right)$ gedämpfte Schwingung

((typischerweise ist $\tau\omega_0 \gg 1$; dann $\omega \approx \omega_0$))

$\tau\omega_0$ $\downarrow$
Erdbeben 10^3
Klaviersaite 10^3
Atom 10^7

(b) inhomogene Lsg: betrachte periodisch antreibende Kraft

$F(t) \equiv m f e^{i\Omega t}$ $(f \in \mathbb{R})$: $\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = f e^{i\Omega t}$

Ansatz für spez. Lsg: $x_{inh} = A e^{i\Omega t} \Rightarrow \left(-\Omega^2 + \frac{i\Omega}{\tau} + \omega_0^2\right) A = f$

$\Leftrightarrow A = \frac{f}{\omega_0^2 - \Omega^2 + \frac{i\Omega}{\tau}} = f \frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - \frac{i\Omega}{\tau}}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2}{\tau^2}} = \frac{f e^{i\varphi}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2}{\tau^2}}}$

mit Phase φ, $\tan\varphi = -\frac{\Omega}{\tau} \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2}$

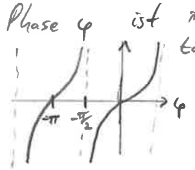
$\Rightarrow$ allg. Lsg $x(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}} \left(A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}\right) + C e^{i(\Omega t + \varphi)}$

mit $C \equiv \frac{f/\omega_0^2}{\sqrt{(1 - \Omega^2/\omega_0^2)^2 + \left(\frac{\Omega}{\tau\omega_0^2}\right)^2}}$ (A, B per Anfangsbed.)

⤳ für $t \gg \tau$ geht $x(t) \to C e^{i(\Omega t + \varphi)}$

(nennt man daher "Relaxationszeit")

⤳ Phase φ ist immer negativ: Ursache → Wirkung; Kausalität

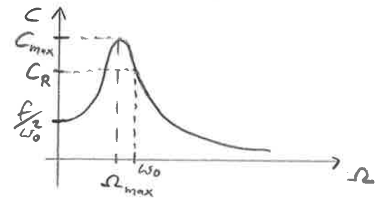


$0 \leq \Omega < \omega_0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \varphi \leq 0$

$\Omega = \omega_0 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$

$\omega_0 < \Omega \Rightarrow -\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$

⤳ betrachte Amplitude C der (eingeschwungenen) Schwingung



Maximum bei

$\Omega_{max} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2(\tau\omega_0)^2}} \overset{\tau\omega_0 \gg 1}{\approx} \omega_0$

$C_{max} = \frac{f\tau/\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{(2\tau\omega_0)^2}}} \approx \frac{f\tau}{\omega_0} \gg \frac{f}{\omega_0^2}$

für $\frac{\Omega}{\omega_0} \gg 1$ geht $C \to 0$

bei $\Omega = \omega_0$ ist $C_R = \frac{f\tau}{\omega_0}$ ("Resonanz")

⤳ für eine reelle antreibende Kraft

$F(t) = m f \sin(\Omega t) \quad \Rightarrow \quad x_{inh}(t) = C \sin(\Omega t + \varphi)$

⤳ Resonanzfall ($\Omega \to \omega_0$) ohne Dämpfung? ($\tau\omega_0 \to \infty$)

(in Lsg oben wird dann $C = \infty$!)

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f \sin(\Omega t)$

Lsg (s.o.) für $\Omega \neq \omega_0$: $x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) + \frac{f}{\omega_0^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t)$

$= \tilde{A} \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) + \frac{f}{\omega_0^2 - \Omega^2} \left[\sin(\Omega t) - \sin(\omega_0 t)\right]$

$\Omega = \omega_0 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll \omega_0$

$\approx \tilde{A} \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) - \frac{f}{2\varepsilon\omega_0} \left[\varepsilon t \cdot \cos(\omega_0 t) + O(\varepsilon^2)\right]$

$= \tilde{A} \sin(\omega_0 t) + \left(B - \frac{f}{2\omega_0} t\right) \cos(\omega_0 t)$

Amplitude divergiert für $t \to \infty$

Bem.:

- gedämpfte lineare Schwingungen mit $s > 1$:
  $\mathcal{F} = \frac{1}{2} \dot{q}_i \mathcal{F}_{ij} \dot{q}_j \quad , \; j = 1, \ldots, s \qquad$ (Einstein !)
  Normalkoord. / Bwgl'n diagonalisieren (d.h. $T, V, \mathcal{F}$ gleichzeitig)
  geht nur in Sonderfällen ...
- man kann auch kleine Schwingungen um eine zeitabhängige Referenzlsg $q_0(t)$ betrachten;
  ein mathematisch "interessanter" Fall
  ⇝ Bwgl. für δq hat dann "zeitabhängige Federkonstanten",
  $$m\, \delta \ddot{q}_a = - \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_a \partial q_b} \right|_{q_0(t)} \delta q_b$$
- in allen Systemen (spätestens bei großen Amplituden) treten Nichtlinearitäten auf;
  → mathematisch erheblich schwieriger!
  (Bsp: anharmonischer Oszillator $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x^n ,\; n \in \{2, 3, \ldots\}$)
  ⇝ Bwgln werden dann meist numerisch gelöst, oder näherungsweise analytisch.
- Kernproblem bei nichtlinearen Dgln:
  Superpositionsprinzip nicht mehr gültig!
  → Schwingungen überlagern sich nicht ungestört
  (→ z.B. Eigenfrequenz ~ Amplitude etc.)
  ⇝ (allg Lsg der inhom Dgl) $\neq$ (allg Lsg der hom Dgl) + (spez Lsg der inhom Dgl)
  ⇝ auch neuartige Phänomene (z.B. Kippen; Resonanzkurven)

(versagt bei chaotischem Verhalten; s. später, Hamilton §4)

- das wichtigste Näherungsverfahren: Störungsrechnung
  falls z.B. nichtlineare Kräfte $\sim \varepsilon$ mit $\varepsilon \ll 1$
  dann Ansatz als Potenzreihe $x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \ldots$,
  $\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \ldots$; ε-Potenzvergleich in Bwgln liefert Bwgln für $x_0, x_1, \ldots$

3.3 Der starre Körper

(sehr wichtiges Bsp der klassischen Mechanik)

Für makroskopische Festkörper ($\sim 10^{23}$ Teilchen / cm^3) wird eine Betrachtung als Mehrteilchensystem (vgl. §1.4) fragwürdig.

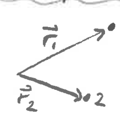
→ Körper erscheinen (oft) als Kontinuum;
wir beobachten z.B. Verschiebungen / Drehungen / Deformationen;
dies hat nur bedingt mit mikroskopischen T.-Bahnen $\vec{r}_i(t)$ zu tun!

→ Idealisierung: Starrer Körper ⇔ Massenpunkte mit vorgegebenen Abständen

((d.h. nicht deformierbar; nicht brauchbar z.B. für Elastizitätstheorie / Hydrodynamik / ...))

→ Anzahl der Freiheitsgrade?

2 Massenpunkte:



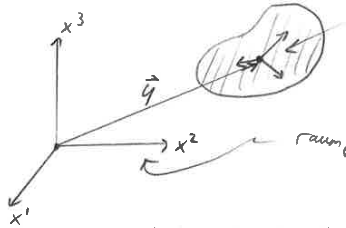
1 Zwangsbedingung, $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \ell_{12}$
$s = 3N - 1 = 6 - 1 = 5$ Freiheitsgrade
z.B. 3 Schwerpkts-Koord. + 2 Winkel (Richtung von $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$)

3 Massenpunkte:

3 Zwangsbedingungen
$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \ell_{12}$
$|\vec{r}_2 - \vec{r}_3| = \ell_{23}$
$|\vec{r}_3 - \vec{r}_1| = \ell_{31}$
$s = 3N - 3 = 9 - 3 = 6$ Freiheitsgrade
z.B. 3 Schwerpunkts-Koord. + 3 ("Euler"-) Winkel

$N \geq 4$ Massenpunkte: 3 neue Abstände (z.B. $\ell_{i1}, \ell_{i2}, \ell_{i3}$)
fixieren die Lage von Punkt i ($3 < i \leq N$)
⇒ $\Delta s = 0$ wenn $N \to N+1$
⇒ der starre Körper hat $s = 6$ Freiheitsgrade
(z.B. 3 Schwerpunkts-Koord. + 3 Winkel)

Kinematik des starren Körpers



körperfestes Koord.-System Σ (i.A. nicht inertial)

raumfestes Inertialsystem Σ_0

Körper hat 6 Freiheitsgrade; 3 beschreiben Schwerpunkts-Bewegung, 3 beschreiben Drehungen

$\rightsquigarrow$ Lagrange-Funktion $L = ?$ Bwgln ? Erhaltungsgrößen ?

betrachte starren Körper aus kleinen Massenstücken (m_a)
mit Ortsvektoren $\vec{x}_{0a}$ zusammengesetzt

$\Rightarrow$ Gesamtmasse: $M \equiv \sum_a m_a$

$\rightsquigarrow$ im $\underset{\sim}{\text{Kontinuumslimes}}$ schreiben wir $\Sigma \to \int$,

$$\sum_a m_a f(\vec{x}_{0a}) \to \int d^3\vec{x}_0\, \underbrace{\varrho(\vec{x}_0)}_{\text{Massendichte}} f(\vec{x}_0)$$

z.B. $\varrho(\vec{x}_0) = \sum_a m_a \delta^{(3)}(\vec{x}_0 - \vec{x}_{0a})$

schreibe $\vec{x}_0 = \vec{y} + R\vec{x}$

- $\vec{x}$: Koord. bzgl. Σ
- R: Rotation (Drehmatrix)
- $\vec{y}$: Translation des Ursprungs
- $\vec{x}_0$: Koord. bzgl. Σ_0

(s. auch Einschub S. 45')

$$\Rightarrow \dot{\vec{x}}_0 = \dot{\vec{y}} + R(\vec{\omega} \times \vec{x}) \qquad (\dot{R}\vec{x} + R\dot{\vec{x}}^{\,0} \leftarrow \text{starrer Körper!})$$

$\vec{\omega}$: Winkelgeschwindigkeit (vgl. §1.3, S.9)

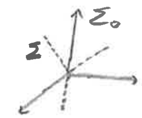
$\rightsquigarrow$ $\underset{\sim}{\text{kin. Energie}}$

$$T = \sum_a \frac{m_a}{2} \dot{\vec{x}}_{0a}^{\,2}$$
$$= \sum_a \frac{m_a}{2} \left(\dot{\vec{y}} + R(\vec{\omega} \times \vec{x}_a)\right)^2$$
$$= \frac{1}{2} \underbrace{\boxed{\sum_a m_a}}_{\stackrel{!}{=} M} \dot{\vec{y}}^{\,2} + \dot{\vec{y}} R \left[\vec{\omega} \times \sum_a m_a \vec{x}_a\right] + \sum_a \frac{m_a}{2}\left[R(\vec{\omega} \times \vec{x}_a)\right]^2$$

(Gesamtmasse, s.o.) ② ③

Einschub: Drehungen

$\vec{y} = \vec{0}$,



$$\vec{x}_0 = R(t)\,\vec{x}$$

R: Drehmatrix, $R^T R = \mathbb{1}$ $\Leftrightarrow R^T = R^{-1}$

$$\Leftrightarrow \vec{x} = R^T(t)\,\vec{x}_0$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{x}}_0 = \dot{R}\vec{x} + R\dot{\vec{x}}, \quad \dot{\vec{x}} = 0,$$

da wir starren Körper betrachten: im System Σ alles $\underline{\text{fixiert}}$.

$\underset{\sim}{\dot{R}\,?}$

$$\dot{R}(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{R(t+\tau) - R(t)}{\tau}$$
$$= \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}\Big[\underbrace{\boxed{R(t+\tau) R^{-1}(t)}}_{\equiv D(t)} - \mathbb{1}\Big] R(t)$$

$\underset{\sim}{D\,?}$ 2 Drehungen hintereinander

$\Rightarrow D$ ist auch Drehung, $D^T D = \mathbb{1}$

bei $\tau = 0$ ist $D = R(t) R^{-1}(t) = \mathbb{1}$

Taylor: $D(t) = \mathbb{1} + \tau\,\Omega(t) + O(\tau^2)$

$$= \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}\left[\tau\,\Omega(t) + O(\tau^2)\right] R(t) = \underline{\underline{\Omega(t) R(t)}}$$

$$\dot{\vec{x}}_0 = \Omega(t) R(t) \vec{x}$$

$\underset{\sim}{\Omega\,?}$

$$D^T = \mathbb{1} + \tau\,\Omega^T + O(\tau^2)$$
$$\mathbb{1} \stackrel{!}{=} D^T D = \mathbb{1} + \tau(\Omega^T + \Omega) + O(\tau^2)$$

$\Rightarrow \Omega = -\Omega^T$ ist antisymmetrisch $\forall t$!

$\rightsquigarrow$ parametrisiere $\Omega(t)$ durch 3 Funktionen ω_0^i, $i = 1,2,3$

z.B. $\Omega(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0^3 & \omega_0^2 \\ \omega_0^3 & 0 & -\omega_0^1 \\ -\omega_0^2 & \omega_0^1 & 0 \end{pmatrix}$, def $\vec{\omega}_0(t) = \begin{pmatrix} \omega_0^1 \\ \omega_0^2 \\ \omega_0^3 \end{pmatrix}$

$$= \Omega(t)\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0^3 & \omega_0^2 \\ \omega_0^3 & 0 & -\omega_0^1 \\ -\omega_0^2 & \omega_0^1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ x_0^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0^2 x_0^3 - \omega_0^3 x_0^2 \\ \omega_0^3 x_0^1 - \omega_0^1 x_0^3 \\ \omega_0^1 x_0^2 - \omega_0^2 x_0^1 \end{pmatrix} = \vec{\omega}_0 \times \vec{x}_0$$

$$= R\,\vec{\omega} \times \vec{x}$$

③: es gilt $(R\vec{a})^2 = R^{ij}a^j R^{ik}a^k = \underbrace{(R^T)^{ji} R^{ik}}_{= \delta^{jk}} a^j a^k = \vec{a}^2$, da R orthogonal: $R^T R = \mathbb{1}$

②: dieser Term verschwindet, falls
- $\dot{\vec{y}} = 0$, d.h. Koord.-Ursprung von Σ ruht
- $\sum_a m_a \vec{x}_a = 0$, d.h. Koord.-Ursprung von Σ liegt im Schwerpkt.

$\Rightarrow$ betrachte im Folgenden nur diese Fälle;
((können Σ-Ursprung immer in Schwerpkt $\vec{X} = \frac{\sum_a m_a \vec{x}_a}{\sum_a m_a}$ legen))

$$T \overset{!}{=} \frac{M}{2}\vec{v}^2 + \frac{1}{2}\sum_a m_a \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{x}_a)^2}, \quad \text{mit } \vec{v} \equiv \dot{\vec{y}}$$

$$= (\vec{\omega} \times \vec{x}_a)^i (\vec{\omega} \times \vec{x}_a)^i = \varepsilon^{ijk}\omega^j x_a^k \varepsilon^{ilm}\omega^l x_a^m$$

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ilm} = \delta^{jl}\delta^{km} - \delta^{jm}\delta^{kl} \quad (\text{vgl. Ü4})$$

$$= \omega^j [\vec{x}_a^2 \delta^{jl} - x_a^j x_a^l]\omega^l$$

$$= \frac{M}{2}\vec{v}^2 + \frac{1}{2}\omega^i I^{ij}\omega^j, \quad \text{mit } I^{ij} \equiv \sum_a m_a [\delta^{ij}\vec{x}_a^2 - x_a^i x_a^j]$$

$$\overset{\binom{\text{Kont.-}}{\text{Limes}}}{=} \int d^3\vec{x}\, \rho(\vec{x}) [\delta^{ij}\vec{x}^2 - x^i x^j]$$

I^{ij} heisst Trägheitstensor

Bem.:
- I^{ij} ist bezüglich eines körperfesten Koord-Systems definiert; hängt daher von Wahl des Ursprungs ab
  $\rightsquigarrow$ s. auch unten
- I^{ij} sind Komponenten eines Tensors 2. Stufe; bezeichne Matrix mit Komponenten I^{ij} als I; dann ist $\omega^i I^{ij}\omega^j = \omega^T I \omega$
- I ist symmetrisch, da $I^{ij} = I^{ji}$

$\rightsquigarrow$ Eigenschaften des Trägheitstensors

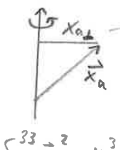
- Transformationsverhalten bei Drehungen:
  $I'^{ij} = R^{ik} R^{jl} I^{kl} = R^{ik} I^{kl} (R^T)^{lj}$
  bzw. $I' = R I R^T$

- Eigenwerte / Eigenvektoren (EW/$\vec{EV}$)
  I ist symmetrische Matrix
  $\Rightarrow$ diagonalisierbar, per orthogonaler Transformation (vgl. §3.1)
  $\Rightarrow$ kann Koord.-System so drehen, dass $I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$

Ü19
Ü20

$\Rightarrow$ $\rightsquigarrow$ diese EW I_1, I_2, I_3 heissen Hauptträgheitsmomente
die entsprechenden $\vec{EV}$ sind Hauptträgheitsachsen

- Trägheitsmoment bzgl. fester Achse:



sei $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \omega \vec{e}_3$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} I^{33} (\omega)^2, \quad \text{wobei } I^{33} = \sum_a m_a [\delta^{33}\vec{x}_a^2 - x_a^3 x_a^3]$$

$$= \sum_a m_a [(x_a^1)^2 + (x_a^2)^2] = \sum_a m_a x_{a\perp}^2$$

$\Rightarrow$ allgem. E im Hauptachsensystem
$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}$, $\quad T = \frac{1}{2}\left(I_1 (\omega^1)^2 + I_2 (\omega^2)^2 + I_3 (\omega^3)^2 \right)$

- Trägheitstensor in einem Σ', welches um $\vec{a}$ relativ zu Σ verschoben ist:
  $\vec{x}_a' = \vec{x}_a + \vec{a}$

$$I'^{ij} = \sum_a m_a [\delta^{ij} (\vec{x}_a')^2 - x_a'^i x_a'^j]$$

$$= \sum_a m_a [\delta^{ij} (\vec{x}_a + \vec{a})^2 - (x_a^i + a^i)(x_a^j + a^j)]$$

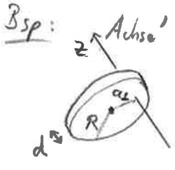
$$= I^{ij} + 2\delta^{ij}\vec{a} \cdot \underbrace{\sum_a m_a \vec{x}_a}_{=0} - a^i \underbrace{\sum_a m_a x_a^j}_{=0} - a^j \underbrace{\sum_a m_a x_a^i}_{=0} + \underbrace{\sum_a m_a}_{=M} [\delta^{ij}\vec{a}^2 - a^i a^j]$$

(SP im Ursprung)

$$I'^{ij} = I^{ij} + M[\delta^{ij}\vec{a}^2 - a^i a^j]$$

Steinerscher Satz (s. auch Ü19c)

Bsp:



$$I'^{33} = \underbrace{I^{33}} + M a_\perp^2$$

und $= \rho \int_0^d dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr\, r\, r^2 = \rho d\, 2\pi \frac{R^4}{4}$

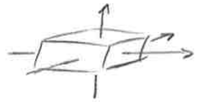
Zylinderkoord. um Achse'

Massendichte

- betrachte nichtdiagonale Komponenten von I, z.B

$$I^{12} = \int d^3x\, \rho(x^1,x^2,x^3)\,[-x^1x^2]$$
$$= \frac{1}{2}\int d^3x \left\{ -\rho(x^1,x^2,x^3)\,x^1x^2 - \rho(\overset{-x^1}{x^1},x^2,x^3)\,\overset{-x^1}{x^1}x^2 \right\}$$
$$= \frac{1}{2}\int d^3x\, \underbrace{\left\{ \rho(-x^1,x^2,x^3) - \rho(x^1,x^2,x^3)\right\}}_{=0 \text{ für symm. } \rho \text{, d.h. falls } \rho(-x^1,\dots)=\rho(x^1,\dots)} x^1x^2$$

$\Rightarrow$ die Hauptträgheitsachsen sind die Symmetrieachsen des st. Körpers



$\uparrow$ (sieht man meist)

- im Hauptachsensystem: $I_1 = \sum_a m_a\left[(x_a^2)^2 + (x_a^3)^2\right]$ etc.

$\Rightarrow$ $I_1, I_2, I_3 \geq 0$ (Trägheitstensor ist positiv definit)

- einige Spezialfälle:
  - ein Massenpunkt, $\vec{x}_1 = 0$ (da im SP) $\Rightarrow I^{ij} = 0$
  - 1-dim Stab $\parallel \vec{e}_3$, $x_a^1 = 0 = x_a^2$ $\Rightarrow I^{33} = 0$, $I^{11} = I^{22} > 0$
  - 2-dim Scheibe $\perp \vec{e}_3$, $x_a^3 = 0$ $\Rightarrow I^{11} + I^{22} = I^{33} > 0$

- Klassifikation der starren Körper:
  - unsymmetrischer Kreisel
    $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$
    Hauptträgheitsachsen sind eindeutig festgelegt.
  - symmetrischer Kreisel
    $I_1 = I_2$, $I_3 \neq I_1$
    nur 3. Hauptträgheitsachse eindeutig festgelegt; in 1-2-Ebene beliebige Wahl möglich.
  - Kugelkreisel
    $I_1 = I_2 = I_3$
    in jedem Koord-System sind die 3 Achsen Hauptträgheitsachsen.

$\rightsquigarrow$ wähle nun als verallg. Koord.: y^i, φ^i $\Rightarrow v^i = \dot{y}^i$, $\omega^i = \dot{\varphi}^i$

dann ist $L = \frac{M}{2}\sum_{i=1}^{3}(\dot{y}^i)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\dot{\varphi}^i I^{ij}\dot{\varphi}^j - V(\vec{y},\vec{\varphi})$

der zu $\vec{y}$ kanonisch konjugierte Impuls: Gesamtimpuls

$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}^i} = M\dot{y}^i = Mv^i$ $\qquad (\vec{p} = M\vec{v})$

der zu $\vec{\varphi}$ kanonisch konjugierte Impuls: Eigendrehimpuls

$M^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}^i} = \sum_{j=1}^{3} I^{ij}\dot{\varphi}^j = \sum_{j=1}^{3} I^{ij}\omega^j$ $\qquad (\vec{M} = I\vec{\omega})$

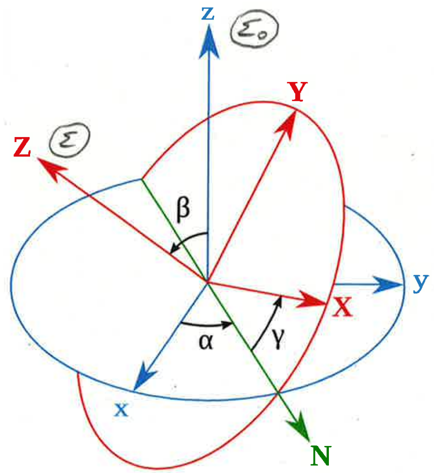
$\Rightarrow$ Bwglen (EL-Glen):

$$\frac{d}{dt}p^i = \frac{\partial L}{\partial y^i} = -\frac{\partial V}{\partial y^i}\,, \qquad \frac{d}{dt}M^i = \frac{\partial L}{\partial \varphi^i} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi^i}$$

"Gesamtkraft" $\qquad$ "Drehmoment"

$\rightsquigarrow$ Wahl der drei Winkel: Eulerwinkel

(bestimme nun explizit die Drehung der Koord.-Systeme, vgl. S. 45)



Σ_0: raumfestes Inertialsystem
Σ: körperfestes Koord. System

$\Leftrightarrow$ 3 Winkel $(\alpha,\beta,\gamma) \Leftrightarrow (\varphi,\theta,\psi)_{\text{Lit}}$

$\vec{x} = R^T\vec{x}_0$, $R^T = C\,B\,A$

mit $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \sin\gamma \equiv s_\gamma$ etc.

$$\Rightarrow R^T = \begin{pmatrix} c_\gamma c_\alpha - s_\gamma c_\beta s_\alpha & c_\gamma s_\alpha + s_\gamma c_\beta c_\alpha & s_\gamma s_\beta \\ -s_\gamma c_\alpha - c_\gamma c_\beta s_\alpha & -s_\gamma s_\alpha + c_\gamma c_\beta c_\alpha & c_\gamma s_\beta \\ s_\beta s_\alpha & -s_\beta c_\alpha & c_\beta \end{pmatrix}$$

Bsp Trafo eines Vektors auf der z-Achse in Σ_0 ins körperfeste System Σ: $\vec{r} = R^T \vec{r}_0 = R^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin\beta \sin\gamma \\ r \sin\beta \cos\gamma \\ r \cos\beta \end{pmatrix}$

für sich bewegende Körper sind dann die Eulerwinkel zeitabhängig: $\vec{x}_0(t) = R(t)\, \vec{x}_K$ zeitunabhängig

können nun aus Kenntnis von R die Winkelgeschw. $\vec{\omega}$ explizit berechnen;
((vgl. S. 45', brauchen $\dot{R}$))

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dot\varphi \sin\theta \sin\psi + \dot\theta \cos\psi \\ \dot\varphi \sin\theta \cos\psi - \dot\theta \sin\psi \\ \dot\varphi \cos\theta \quad + \dot\psi \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ im Hauptachsensystem ist die kinetische Energie dann (ohne Schwerpkts-Bewegung)

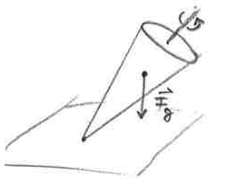
$$T_{Rot.} = \frac{1}{2} \omega^i I^{ik} \omega^k = \frac{1}{2}\left[I_1 (\omega^1)^2 + I_2 (\omega^2)^2 + I_3 (\omega^3)^2\right]^{(s. S. 47)}$$

(Eulerwinkel einsetzen)

$$= \frac{1}{2}\Big\{ \dot\varphi^2 \left[(I_1 \sin^2\psi + I_2 \cos^2\psi) \sin^2\theta + I_3 \cos^2\theta \right]$$
$$+ \dot\theta^2 \left[I_1 \cos^2\psi + I_2 \sin^2\psi \right]$$
$$+ \dot\psi^2 I_3$$
$$+ 2 \dot\varphi \dot\theta \, [I_1 - I_2] \sin\theta \sin\psi \cos\psi$$
$$+ 2 \dot\varphi \dot\psi \, I_3 \cos\theta \Big\}$$

$\Rightarrow$ haben nun explizit $L(q^i, \varphi, \theta, \psi)$

$\rightsquigarrow$ Bwgln; Lsg i.A. aber sehr schwierig ...



z.B. Kreisel

Lsg aber möglich mit Vereinfachungen, z.B. §3.4

3.4 Der symmetrische Kreisel

betrachte nun den Fall $I_1 = I_2 \equiv I$

$\rightsquigarrow$ kin E: $T_{Rot.} = \frac{1}{2}\left[I\left((\omega^1)^2 + (\omega^2)^2\right) + I_3 (\omega^3)^2 \right]$
$= \frac{I}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi \cos\theta\right)^2$

Kräftefreier Kreisel: $L = T$

$\Rightarrow$ φ und ψ kommen nicht vor (zyklische Variablen!)

$\Rightarrow$ zwei der Bwgln. sind Erhaltungssätze

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = 0$$

im Inertialsystem Σ_0 ist (wegen $V=0$) der Drehimpuls $\vec{L}_0$ erhalten

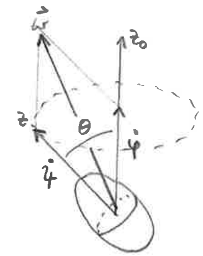
$\rightsquigarrow$ wähle Σ_0 z.B. so dass $\vec{L}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{pmatrix}$

im körperfesten System Σ ist dann (siehe Bsp S. 50)

$$\vec{L} = R^T \vec{L}_0 = \begin{pmatrix} L \sin\theta \sin\psi \\ L \sin\theta \cos\psi \\ L \cos\theta \end{pmatrix}$$

in Σ ist I diagonal, also gilt auch

$$= \begin{pmatrix} I\omega^1 \\ I\omega^2 \\ I_3 \omega^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I(\dot\varphi \sin\theta \sin\psi + \dot\theta \cos\psi) \\ I(\dot\varphi \sin\theta \cos\psi - \dot\theta \sin\psi) \\ I_3(\dot\varphi \cos\theta + \dot\psi) \end{pmatrix}$$



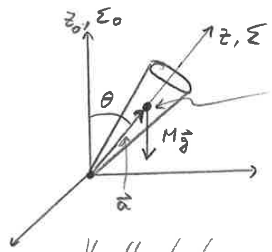
- $\cos\psi \cdot (1.\text{ Zeile}) - \sin\psi\,(2.\text{ Zeile})$ $\rightsquigarrow$ $\dot\theta = 0$

  $\Rightarrow$ Winkel zwischen z-Achsen in Σ_0, Σ ist zeitunabhängig
- $(1.\text{ Zeile})\big|_{\theta=0}$ $\rightsquigarrow$ $\dot\varphi = \frac{L}{I}$ (= const.)

  $\Rightarrow$ "Knotenlinie" (N auf S. 49) dreht sich mit konstanter Winkelgeschw. um z-Achse von Σ_0: "Präzession"
- (3. Zeile) $\rightsquigarrow$ $\dot\psi = \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I}\right) L \cos\theta$ (= const.)

  $\Rightarrow$ Drehung mit konst. Winkelgeschw. um z-Achse von Σ: "Rotation um Figurenachse"

Kinderkreisel: symm. Kreisel im Erdschwerefeld, Kreisel-Spitze festgehalten



Schwerpkt

wähle Σ_0 mit z_0-Achse $\parallel \vec{g}$ (Schwerefeld)

wähle Ursprung Σ_0, Σ als Kreiselspitze

Hauptträgheitsmomente in Σ?

$\rightsquigarrow$ Steiner: $I_1 = I_2 = I^{cms} + Ma^2 \equiv \tilde{I}$

$I_3 = I_3^{cms}$

Schwerkraft $\rightarrow$ Potential $V = Mgz_0 = Mga\cos\theta$

$$\Rightarrow L = \frac{\tilde{I}}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2 - Mga\cos\theta$$

- φ, ψ wieder zyklisch $\Rightarrow$ Erhaltungssätze

$\dot p_\varphi = 0$ mit $p_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \dot\varphi\left(\tilde{I}\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta\right) + \dot\psi I_3 \cos\theta$

$\dot p_\psi = 0$ mit $p_\psi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = I_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)$

$$\Leftrightarrow \dot\varphi = \frac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{\tilde{I}\sin^2\theta}, \quad \dot\psi = \frac{p_\psi\cos^2\theta - p_\varphi\cos\theta}{\tilde{I}\sin^2\theta} + \frac{p_\psi}{I_3}$$

(($V=0$, S.51: hatten $\theta = $ const $\Rightarrow$ konnten $\dot\varphi, \dot\psi$-Gln trivial integrieren; jetzt: $\theta(t) = ?$, dann $\varphi(t), \psi(t)$))

- betrachte Energieerhaltung (vgl. Zentralkraftprobleme, §1)

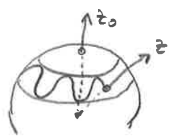
$$E = T + V = \frac{\tilde{I}}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2 + Mga\cos\theta$$

jetzt $\dot\varphi(\theta)$, $\dot\psi(\theta)$ einsetzen

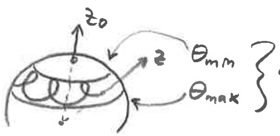
$$= \frac{\tilde{I}}{2}\dot\theta^2 + \underbrace{\frac{p_\psi^2}{2I_3^2} + Mga}_{\equiv E - \tilde{E}} + V_{eff}(\theta)$$

TdV: $t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{\tilde{I}}\left[\tilde{E} - V_{eff}(\theta)\right]}}$ ... (elliptisches Integral) ... $\rightsquigarrow \theta(t)$

$\Rightarrow$ Resultat:



bzw



$\left.\begin{matrix}\theta_{min}\\ \theta_{max}\end{matrix}\right\}$ aus $[\;] \overset{!}{\geq} 0$

4. Hamilton-Formalismus

$\rightarrow$ nach Newton- und Lagrange- der dritte Formalismus der klass. Mechanik; warum?

- wichtig beim Übergang zu Quantenmechanik (Theorie II)
  Statistische Physik (Theorie III)
- ist oft "elegant", hat "ästhetische" Vorteile

4.1 Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

Erinnerung an Lagrange-Formalismus:

verallg. Koord. q_a, verallg. Geschwindigkeiten $\dot q_a$, $a = 1, \dots, s$

Lagrange-Funktion $L(q, \dot q, t)$ $\Rightarrow$ verallg. Impulse $p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot q_a}$

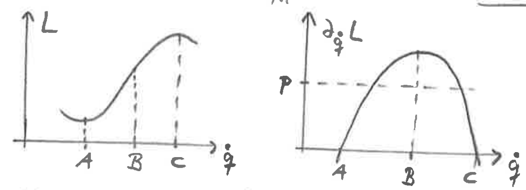
neue Idee: nehme q_a, p_a (statt $q_a, \dot q_a$) als Koordinaten

$\rightarrow$ diese bilden einen $2s$-dim. Phasenraum

- wollen in $L(q, \dot q, t)$ die $\dot q_a$ durch p_a ersetzen

$\Rightarrow$ müssen die Def $p_a = \partial_{\dot q_a} L(q, \dot q, t)$ invertieren!

aber z.B.:



d.h. $p \leftrightarrow q$ nicht eindeutig;

jedoch: $p \leftrightarrow q$ eindeutig, falls $\dot q < B$ oder $\dot q > B$

$\Rightarrow$ Invertieren nur möglich in einem Bereich mit $\partial_{\dot q}^2 L \neq 0$

- auch nach Beschränkung auf z.B. $\dot q < B$ enthält $L(q, \dot q(p), t)$ weniger Information als $L(q, \dot q, t)$!

z.B. $L = \frac{m}{2}\dot q^2$, $p = \partial_{\dot q} L = m\dot q$, $L = \frac{1}{2m}p^2$

vs. $\tilde{L} = \frac{m}{2}(\dot q - f(q))^2$, $\tilde{p} = m(\dot q - f(q))$, $\tilde{L} = \frac{1}{2m}\tilde{p}^2$

verschiedene Physik (EL-Gln) dieselbe Funktion?! ↯

die Lösung des Problems: Legendre-Transformation

Behauptung: Die Hamilton-Funktion, def. durch

$$H(q,p,t) \equiv \sum_{a=1}^{s} \dot{q}_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - L = \sum_{a=1}^{s} \dot{q}_a p_a - L$$

enthält dieselbe Information wie $L(q,\dot{q},t)$,
d.h. aus gegebener $H(q,p,t)$ kann $L(q,\dot{q},t)$ rekonstruiert werden (solange $\det(\partial_{\dot{q}_a}\partial_{\dot{q}_b} L) \neq 0$ ist).

Bem.:
- in H muss $\dot{q}$ durch p ersetzt werden; H formal $\dot{q}$-unabh.:
  $$\partial_{\dot{q}_b} H = \partial_{\dot{q}_b}\Big[\sum_{a=1}^{s} \dot{q}_a p_a - L\Big] = p_b - \partial_{\dot{q}_b} L = p_b - p_b = 0$$
- die Transformation von $L \to H$ heisst Legendre-Trafo bzgl. $\dot{q}$
- physikalisch entspricht H der Energie des Systems

Beweis: (durch explizite Konstruktion: inverse Leg-Trafo)

sei H gegeben; def $\dot{Q}_b \equiv \partial_{p_b} H = \partial_{p_b}\Big[\sum_{a=1}^{s} \dot{q}_a p_a - L(q,\dot{q},t)\Big]$

$$= \dot{q}_b + \sum_{a=1}^{s} \frac{\partial \dot{q}_a}{\partial p_b} p_a - \sum_{a=1}^{s} \underbrace{\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}}}_{=p_a} \frac{\partial \dot{q}_a}{\partial p_b} = \dot{q}_b$$

def $L^{neu} \equiv \sum_{b=1}^{s} p_b \partial_{p_b} H - H = \sum_{b=1}^{s} p_b \dot{q}_b - \Big[\sum_{a=1}^{s} \dot{q}_a p_a - L\Big] = L$ qed

Bsp sei: $L \equiv \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$

$$\Rightarrow p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}, \quad H = p\dot{q} - L = m\dot{q}^2 - \frac{m}{2}\dot{q}^2 + V(q) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + V(q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

inverse Trafo: $\dot{q} = \partial_p H = p/m$, $L^{neu} = p\dot{q} - H = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} - V(q) = \frac{p^2}{2m} - V(q) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$ ✓ ok

Bsp (Thermodynamik:) innere Energie $U(S,V,N)$ — Teilchenzahl, Volumen, Entropie

Temperatur $T = \frac{\partial U}{\partial S}$

freie Energie $F(T,V,N) = U(S,V,N) - S\frac{\partial U}{\partial S} = U - TS$

((d.h. $-F \leftrightarrow U$ ist Legendre Trafo))

⤳ wissen nun, dass im Prinzip alle Information in der Hamilton-Funktion $H(q,p,t)$ enthalten ist.

⤳ wie beschreibt man nun die Dynamik des Systems (d.h. Zeitableitungen der Phasenraumkoord. q,p)?

$\Rightarrow$ Euler-Lagrange-Glgn durch H ausdrücken!

- wissen schon (s. S. 54), dass $\frac{dq_a}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_a}$ gilt
- betrachte nun noch $\frac{\partial H}{\partial q_a}$:

$$H = \sum_{b=1}^{s} p_b \dot{q}_b(q,p,t) - L(q,\dot{q}(q,p,t),t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial q_a} = \sum_{b=1}^{s} p_b \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial q_a} - \frac{\partial L}{\partial q_a} - \sum_{b=1}^{s} \underbrace{\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b}}}_{=p_b} \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial q_a}$$

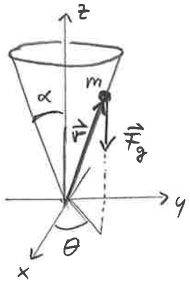
$$= -\frac{\partial L}{\partial q_a} \overset{(EL)}{=} -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = -\frac{d}{dt} p_a$$

$\Rightarrow$ Hamiltonsche Bewglgn $\boxed{\frac{dq_a}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \quad \frac{dp_a}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_a}}$

Bem.:
- Im Hamilton-Formalismus haben wir also 2 Dglн 1. Ordnung (statt 1 Dgl 2. Ordnung)
- es folgt
  $$\frac{dH}{dt} = \sum_a \frac{\partial H}{\partial q_a}\underbrace{\boxed{\frac{dq_a}{dt}}}_{=\frac{\partial H}{\partial p_a}} + \sum_a \frac{\partial H}{\partial p_a}\underbrace{\boxed{\frac{dp_a}{dt}}}_{=-\frac{\partial H}{\partial q_a}} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

  falls $H(q,p,\cancel{t})$ also nicht explizit von t abhängt, ist $\frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow H$ = Energie bleibt erhalten.

Bsp



(vgl. <u>Ü16</u> : Massenpunkt gleitet reibungsfrei im Schwerefeld auf einem Kreiskegel)

wähle verallg. Koord.: $r = |\vec r|$, θ

((Öffnungswinkel des Kegels α bleibt konstant))

$$\vec r = \begin{pmatrix} r \sin\alpha \cos\theta \\ r \sin\alpha \sin\theta \\ r \cos\alpha \end{pmatrix} , \quad \dot{\vec r} = \begin{pmatrix} \dot r \sin\alpha \cos\theta - \dot\theta r \sin\alpha \sin\theta \\ \dot r \sin\alpha \sin\theta + \dot\theta r \sin\alpha \cos\theta \\ \dot r \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $T = \frac{m}{2} \dot{\vec r}^{\,2} = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + \dot\theta^2 r^2 \sin^2\alpha\right)$

$V = mgz = mgr\cos\alpha$

$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + \dot\theta^2 r^2 \sin^2\alpha\right) - mgr\cos\alpha \qquad (s=2)$

verallg. Imp. $p_r = \partial_{\dot r} L = m\dot r$, $p_\theta = \partial_{\dot\theta} L = m\dot\theta r^2 \sin^2\alpha$

$\Rightarrow$ Hamilton-Funktion ist dann

$$\begin{aligned} H &= \dot r p_r + \dot\theta p_\theta - L \\ &= m\dot r^2 + m\dot\theta^2 r^2 \sin^2\alpha - \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + \dot\theta^2 r^2 \sin^2\alpha\right) + mgr\cos\alpha \\ &= \frac{m}{2}\dot r^2 + \frac{m}{2}\dot\theta^2 r^2 \sin^2\alpha + mgr\cos\alpha \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ die Hamiltonschen Bwglen lauten also:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \, , \qquad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3\sin^2\alpha} - mg\cos\alpha$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2\sin^2\alpha} \, , \qquad \frac{dp_\theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial\theta} = 0 \quad ((\Rightarrow p_\theta \text{ erhalten}))$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{1}{m}\frac{dp_r}{dt} = \frac{p_\theta^2}{m^2\sin^2\alpha}\frac{1}{r^3} - g\cos\alpha = \frac{c_1}{r^3} + c_2 \quad \leftarrow \text{Konstanten}$$

((Glg. hängt nicht von θ ab $\rightsquigarrow$ Lsg ist $r(t)$;

danach kann $\theta(t)$ aus $\frac{d\theta}{dt} = \frac{p_\theta}{m\sin^2\alpha}\frac{1}{r^2(t)}$

bestimmt werden))

<u>4.2 kanonische Transformationen</u>

wollen Hamiltonsche Bwglen (s. S. 55) $\frac{dq_a}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial p_a}$, $\frac{dp_a}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_a}$

noch eleganter / symmetrischer schreiben

betrachte eine beliebige im Phasenraum def. Funktion $f(q,p,t)$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = \sum_{a=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial q_a}\boxed{\frac{dq_a}{dt}} + \sum_{a=1}^{s}\frac{\partial f}{\partial p_a}\boxed{\frac{dp_a}{dt}} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= \sum_{a=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\partial H}{\partial p_a} - \frac{\partial f}{\partial p_a}\frac{\partial H}{\partial q_a}\right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

def. <u>Poisson-Klammer</u> $\{f,g\} \equiv \sum_{a=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\partial g}{\partial p_a} - \frac{\partial f}{\partial p_a}\frac{\partial g}{\partial q_a}\right)$

wobei $f(q,p,t)$, $g(q,p,t)$ beliebige reellwertige Fkt sind

$$= \{f,H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

damit ist auch $\boxed{\frac{dq_a}{dt} = \{q_a, H\} \, , \quad \frac{dp_a}{dt} = \{p_a, H\}}$

denn: $\{q_a, H\} = \sum_b \underbrace{\frac{\partial q_a}{\partial q_b}}_{=\delta_{ab}}\frac{\partial H}{\partial p_b} - \sum_b \underbrace{\frac{\partial q_a}{\partial p_b}}_{=0}\frac{\partial H}{\partial q_b} = \frac{\partial H}{\partial p_a}$ ✓

$\{p_a, H\} = \sum_b \underbrace{\frac{\partial p_a}{\partial q_b}}_{=0}\frac{\partial H}{\partial p_b} - \sum_b \underbrace{\frac{\partial p_a}{\partial p_b}}_{=\delta_{ab}}\frac{\partial H}{\partial q_b} = -\frac{\partial H}{\partial q_a}$ ✓

$\rightsquigarrow$ Eigenschaften der Poisson-Klammer:

- $\{g,f\} = \sum_a \left(\frac{\partial g}{\partial q_a}\frac{\partial f}{\partial p_a} - \frac{\partial g}{\partial p_a}\frac{\partial f}{\partial q_a}\right) = -\{f,g\}$ ist antisymmetrisch
- für eine Konstante c gilt: $\{f,c\} = 0$
- $\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} = c_1\{f_1,g\} + c_2\{f_2,g\}$ ist bilinear
- $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$ — <u>Jacobi-Identität</u>

Beweis durch explizites Ausschreiben ...

$$\{h,\{f,g\}\} = \sum_{a,b}\frac{\partial h}{\partial q_b}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_b\partial q_a}\frac{\partial g}{\partial p_a} + \frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\partial^2 g}{\partial p_b\partial p_a} - \frac{\partial^2 f}{\partial p_b\partial p_a}\frac{\partial g}{\partial q_a} - \frac{\partial f}{\partial p_a}\frac{\partial^2 g}{\partial p_b\partial q_a}\right)$$

$$- \sum_{a,b}\frac{\partial h}{\partial p_b}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_b\partial q_a}\frac{\partial g}{\partial p_a} + \frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\partial^2 g}{\partial q_b\partial p_a} - \frac{\partial^2 f}{\partial q_b\partial p_a}\frac{\partial g}{\partial q_a} - \frac{\partial f}{\partial p_a}\frac{\partial^2 g}{\partial q_b\partial q_a}\right)$$

andere Terme addieren, Indizes umbenennen ... $= 0$ qed

- $\{q_a, q_b\} = 0 = \{p_a, p_b\}$

  denn z.B. $\{q_a, q_b\} = \sum_c \left(\frac{\partial q_a}{\partial q_c} \underbrace{\frac{\partial q_b}{\partial p_c}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial q_a}{\partial p_c}}_{=0} \frac{\partial q_b}{\partial q_c} \right) = 0$ ✓

- $\{q_a, p_b\} = \sum_c \left(\underbrace{\frac{\partial q_a}{\partial q_c}}_{=\delta_{ac}} \underbrace{\frac{\partial p_b}{\partial p_c}}_{=\delta_{bc}} - \underbrace{\frac{\partial q_a}{\partial p_c}}_{=0} \underbrace{\frac{\partial p_b}{\partial q_c}}_{=0} \right) = \sum_c \delta_{ac}\delta_{bc} = \delta_{ab}$

  ⇝ sehr wichtiger Spezialfall; hat direktes Analogon in Quantenmechanik

→ betrachte nun Transformationen der Koordinaten

$Q_a = Q_a(q, t)$ ist Punkttrafo im Koord.-Raum ((z.B. $(x,y) \to (r,\varphi)$))

$\begin{cases} Q_a = Q_a(q,p,t) \\ P_a = P_a(q,p,t) \end{cases}$ ist Punkttrafo im Phasenraum ((allgemeiner als ↑))

man spricht von einer kanonischen Transformation, falls die neuen Koord. die Werte von Poisson-Klammern nicht ändern;

d.h. $\{f,g\}_{qp} = \{f,g\}_{QP}$, insbesondere $\{Q_a, Q_b\} = 0 = \{P_a, P_b\}$
$\{Q_a, P_b\} = \delta_{ab}$

Bsp (s=1) $\{f,g\}_{qp} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$, $\{f,g\}_{QP} = \frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\partial g}{\partial P} - \frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial g}{\partial Q}$

$\begin{pmatrix} f(Q,P) \\ g(Q,P) \end{pmatrix}$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial q} \right)\left(\frac{\partial g}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial g}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial p} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial p} \right)\left(\frac{\partial g}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial g}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial q} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\partial g}{\partial P} - \frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial g}{\partial Q} \right)\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} \right)$$

$$= \{f,g\}_{QP}\,\{Q,P\}_{qp}$$

⇒ für kanon. Trafo $1 \stackrel{!}{=} \{Q,P\}_{qp} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} \equiv \frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)}$

allg. lineare Trafo: $Q = a_{11} q + a_{12} p + b_1$, $P = a_{21} q + a_{22} p + b_2$

⇒ $\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \equiv \det A \stackrel{!}{=} 1$

⇒ die Matrix A muss unimodular sein;

z.B. $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ Drehung

$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$ Skalentransformation

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $Q = -p$, $P = q$

⇝ allg. Fall ($s \geq 1$):

$$\{f,g\} = \sum_a \left(\frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\partial g}{\partial p_a} - \frac{\partial f}{\partial p_a}\frac{\partial g}{\partial q_a} \right) = \left(\left\{\frac{\partial f}{\partial q_a}\right\}, \left\{\frac{\partial f}{\partial p_a}\right\} \right) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{s\times s} \\ -\mathbb{1}_{s\times s} & 0 \end{pmatrix}}_{\equiv J} \begin{pmatrix} \left\{\frac{\partial g}{\partial q_a}\right\} \\ \left\{\frac{\partial g}{\partial p_a}\right\} \end{pmatrix}$$

es gilt auch:

$$\begin{pmatrix} \left\{\frac{\partial g}{\partial q_a}\right\} \\ \left\{\frac{\partial g}{\partial p_a}\right\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left\{ \sum_b \left(\frac{\partial Q_b}{\partial q_a}\frac{\partial g}{\partial Q_b} + \frac{\partial P_b}{\partial q_a}\frac{\partial g}{\partial P_b} \right) \right\} \\ \left\{ \sum_b \left(\frac{\partial Q_b}{\partial p_a}\frac{\partial g}{\partial Q_b} + \frac{\partial P_b}{\partial p_a}\frac{\partial g}{\partial P_b} \right) \right\} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial Q_b}{\partial q_a} & \frac{\partial P_b}{\partial q_a} \\ \frac{\partial Q_b}{\partial p_a} & \frac{\partial P_b}{\partial p_a} \end{pmatrix}}_{\equiv M} \begin{pmatrix} \left\{\frac{\partial g}{\partial Q_b}\right\} \\ \left\{\frac{\partial g}{\partial P_b}\right\} \end{pmatrix}$$

also ist $\{f,g\}_{qp} = \{f,g\}_{QP} \iff M^T J M = J$

solche Matrizen M bilden eine "symplektische" Gruppe $Sp(2s)$

((denn: $A^T J A = J$ und $B^T J B = J$

$\Rightarrow (AB)^T J AB = B^T A^T J AB = B^T J B = J$))

die $Sp(2s)$ ist Grundlage der "Mathematik der klassischen Mechanik"

((s. z.B. [V. Arnold, Mathem. Meth. der klass. Mech.]))

Bem.: • Zeitabhängigkeit kann auch als kanon. Trafo gesehen werden:

$Q_a = Q_a(q_0, p_0, t)$, $P_a = P_a(q_0, p_0, t)$ mit Anfangsbed. q_0, p_0

denn: $Q_b = q_b + \Delta t \frac{dq_b}{dt} = q_b + \Delta t \frac{\partial H}{\partial p_b}$

$P_b = p_b + \Delta t \frac{dp_b}{dt} = p_b - \Delta t \frac{\partial H}{\partial q_b}$

$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} \mathbb{1} + \Delta t \frac{\partial^2 H}{\partial q_a \partial p_b} & -\Delta t \frac{\partial^2 H}{\partial q_a \partial q_b} \\ \Delta t \frac{\partial^2 H}{\partial p_a \partial p_b} & \mathbb{1} - \Delta t \frac{\partial^2 H}{\partial p_a \partial q_b} \end{pmatrix}$, $M^T J M = \ldots = J + O(\Delta t^2)$

qed.

• Ziel: finde kanon. Trafo, so dass die Q_a zyklisch sind

dann: $H = H(P_a, t)$, $\frac{dP_a}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q_a} = 0$, $\frac{dQ_a}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_a}$

falls $H(P_a, \cancel{t})$ $\Rightarrow Q_a(t) = \frac{\partial H}{\partial P_a} \cdot t + Q_a(0)$ System ist integrierbar

• wegen $M^T J M = J \Rightarrow |\det M| = 1$ gilt

$$\int dQ_1 \ldots dQ_s\, dP_1 \ldots dP_s = \int dq_1 \ldots dq_s\, dp_1 \ldots dp_s \underbrace{\left| \det \frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} \right|}_{= |\det M^T| = 1}$$

⇒ Volumenelement im Phasenraum ist eine kanonische Invariante!

((wichtig in statistischer Mechanik; s. auch §4.3 2))

4.3 Phasenraum und Satz von Liouville

betrachte ein System mit s Freiheitsgraden ;
verallg. Koord. q_a, kanonisch konj. Impulse p_a

$\Rightarrow$ die Punkte $\Pi \equiv (q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)$ bilden den 2s-dimensionalen Phasenraum des Systems (vgl. § 4.1)

- ein Punkt im Phasenraum $\Leftrightarrow$ ein vollständig charakterisierter Zustand des Systems
- Zeitentwicklung des Systems definiert eine Kurve im Phasenraum, die Phasenraum-Trajektorie

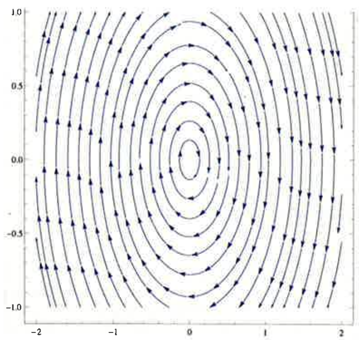
Bsp.: (1-dim H.O.) $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} q^2$

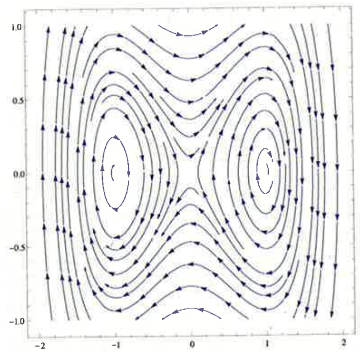
$\Rightarrow \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq \,, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$

$\Rightarrow \frac{d^2 q}{dt^2} = \frac{1}{m}\frac{dp}{dt} = -\frac{k}{m} q \equiv -\omega^2 q$

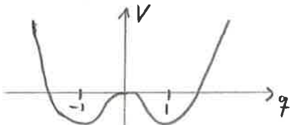
Lsg $q = A\cos(\omega(t-t_0))$

$p = -m\omega A \sin(\omega(t-t_0))$





$\leftarrow$ Bsp.: (quartisches Potential)



Bsp.: (Pendel ; vgl. §2.3, S.28)

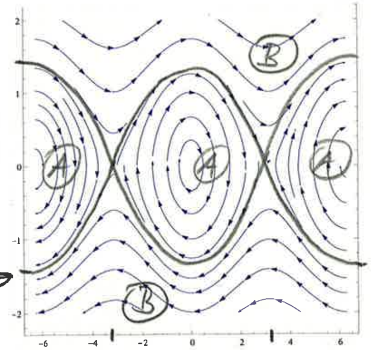
$q = \varphi \,, \quad L = \frac{m}{2} \ell^2 \dot{q}^2 + mg\ell \cos q$

$p = \partial_{\dot q} L = m\ell^2 \dot q \,, \quad H = \frac{p^2}{2m\ell^2} - mg\ell\cos q$

Schwingungen  (A)

Drehungen  (B)

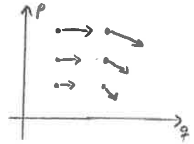
Separatrix $\to$



$\rightsquigarrow$ ein Punkt Π im Phasenraum hat die Geschwindigkeit

$$\frac{d\Pi}{dt} = \left(\frac{dq_1}{dt}, \dots, \frac{dq_s}{dt}, \frac{dp_1}{dt}, \dots, \frac{dp_s}{dt}\right) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_s}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_s}\right) \equiv \vec\omega(q,p,t)$$

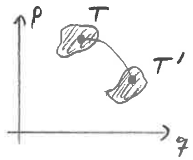
$\vec\omega(q,p,t)$ ist 2s-dim Vektorfeld im Phasenraum ;
falls $H(q,p,\cancel{t}) \Rightarrow$ auch $\vec\omega(q,p,\cancel{t})$



((s. auch math Phasenraum.pdf online))

für das Vektorfeld $\vec\omega$ gilt (vgl. Kontinuitätsglg $\dot\varrho + \vec\nabla\cdot\vec j = 0$)

$$\operatorname{div}\vec\omega = \vec\nabla\cdot\vec\omega = \sum_{a=1}^{s} \frac{\partial\omega_a}{\partial q_a} + \sum_{a=1}^{s}\frac{\partial\omega_{a+s}}{\partial p_a} = \sum_{a=1}^{s}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_a \partial p_a} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_a \partial q_a}\right) = 0$$



für einen Teilbereich T des Phasenraums :
jeder Punkt $\in T$ verschiebt sich aufgrund der Bwglen ; also verschiebt sich $T \to T'$.

$\Rightarrow$ Satz von Liouville: das Volumen eines Teilbereichs des Phasenraums, der gemäß den Hamiltonschen Bwglen verschoben wird, bleibt konstant, d.h. $Vol(T) = Vol(T')$.

Bem
- die Form von T ändert sich i.A. bei der Verschiebung
- vgl. auch Bem. auf S. 59: Volumenelement invariant
- interpretiere T z.B. als Menge von nahe beieinanderliegenden Massepunkten mit ähnlichen Geschwindigkeiten (z.B. Teilvolumen einer strömenden Flüssigkeit)
- wichtige Anwendungen des Satzes v. Liouville z.B. in klassischer statistischer Mechanik

→ zum **Beweis** des Satzes v. Liouville:

wähle eine (gleichmäßig verteilte) Menge von N Massenpunkten als "Tracer", um dem Teilbereich T zu folgen:

, $\rho(t_0) \equiv \frac{\text{Zahl } N \text{ der MP}}{\text{Phasenraum-Vol.}} = const_{q,p}$

↑ Teilchendichte

die Teilchendichte ρ genügt der Kontinuitätsglg

$\partial_t \rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$,

wobei $\vec{j} = \rho\vec{\omega}$ die Teilchenstromdichte ist

$\left(\frac{\text{Teilchen}}{\text{Fläche}\cdot\text{Zeit}} = \frac{\text{Teilchen}}{\text{Volumen}} \cdot \frac{\text{Drehe}}{\text{Zeit}} \right.$

$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{\omega}) = \underbrace{(\vec{\nabla}\rho)\cdot\vec{\omega}}_{=0} + \rho\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega})}_{=0 \text{ (s. S. 61)}}$

$=0$ (laut Annahme: Teilchen gleichmäßig verteilt)

$\Rightarrow \partial_t\rho = 0$, Teilchendichte bleibt konstant

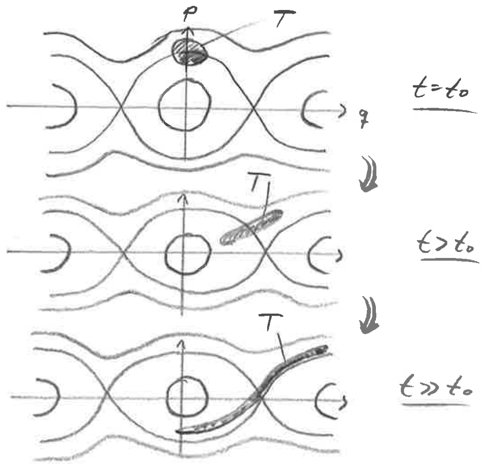
wegen $N(t) = \int_{Vol(T(t))} \rho(t)$, und da sowohl ρ als auch N (laut Annahme) konstant sind, muss das Volumen des Bereichs T auch konstant bleiben.

qed

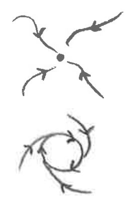
→ Die Dynamik von Systemen ist deterministisch.
Phasenraumbetrachtungen machen deutlich, dass bei einigen Systemen kleine Änderungen der Anfangsbedingungen große Änderungen im Endergebnis hervorrufen können;

<u>Bsp:</u> Pendel, vgl. S. 60

⇒ Volumen von T bleibt konstant; aber Form wird verändert/verzerrt.



<u>Bem.:</u>



- manchmal ist die Verzerrung sehr groß; der für $t\to\infty$ besetzte Teilbereich (oft: Punkt, Linie) (<u>Grenzzyklus</u> / <u>Attraktor</u>) kann dann auch einen seltsamen Bereich des Phasenraums füllen, sogar einen Bereich von nichtganzzahliger Dimension → man spricht dann von <u>Chaos</u>
- quantitatives Maß für das Auseinanderstreben der Lsn:

  $s(t) = s(t_0)\, e^{\lambda(t-t_0)}$

  λ: <u>Lyapunov-Exponent</u>

  s: Entfernung zweier Punkte im Phasenraum

  ⇒ für $\lambda > 0$ ist die Bewegung chaotisch
- z.B. Himmelsmechanik / Stabilität des Sonnensystems

  → Dreikörperproblem, nicht analytisch lösbar, kann chaotische Bahnen haben

  → Sonnensystem: $\lambda \approx +3\cdot10^{-10}\,\frac{1}{\text{Jahr}}$

5. Spezielle Relativitätstheorie: erster Eindruck

→ bisher in klass. (nicht-relativistischer) Mechanik:
absolute Zeit t (Existenz wurde vorausgesetzt)

⇝ nun: "Ereignisse" in der Raum-Zeit, $(\vec{x}, t)$ vs $(\vec{x}', t')$

5.1 Lorentz-Transformation

betrachte Galilei-Trafo (vgl. §1.3) zwischen Inertialsystemen mit der Eigenschaft $(\vec{x}, t) = (\vec{0}, 0) \Leftrightarrow (\vec{x}', t') = (\vec{0}, 0)$

→ d.h. Boosts $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{u}t$ und Drehungen $\vec{x}' = R\vec{x}$

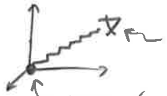
Raum-Zeit

Ereignis ≡ physikalischer Prozess bei $(\vec{x}, t)$ bzw. $(\vec{x}', t')$

- laut Galilei-Trafo gilt für einen Boost:

$$\left\{\begin{matrix} \vec{x}' = \vec{x} - \vec{u}t \\ t' = t \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{v}' = \partial_{t'}\vec{x}' = \partial_t(\vec{x} - \vec{u}t) = \vec{v} - \vec{u}$$

dies würde auch für Licht gelten



beobachtet bei $(\vec{x}, t)$ bzw. $(\vec{x}', t')$

erzeugt bei $(\vec{0}, 0)$

$\Rightarrow v' = c' \neq c = v$ ↯

⇝ dies steht im Widerspruch zu

(a) Experimenten, z.B. Michelson/Morley (1887)

(b) Maxwell-Gln. (s. Elektrodynamik; alle elektromagn. Wellen haben in allen Inertialsystemen dieselbe Geschwindigkeit ≡ c)

⇝ Galilei-Trafo kann also nicht richtig sein!

- neues Prinzip (Einstein, ca. 1905):

für Licht gilt $c = \left|\frac{d\vec{x}'}{dt'}\right| = \left|\frac{d\vec{x}}{dt}\right|$ $\vec{x}_b - \vec{x}_a$, $t_b - t_a$ Messung durch zwei Ereignisse, z.B. Erzeugg + Beobachtg

$\Leftrightarrow$ $|d\vec{x}'| = c\,dt'$
$|d\vec{x}| = c\,dt$

$\Rightarrow c^2dt^2 - d\vec{x}^2 = c^2dt'^2 - d\vec{x}'^2 \equiv ds^2$ Abstand sei invariant.

lineare Trafos $\begin{pmatrix} c\,dt' \\ d\vec{x}' \end{pmatrix} = \Lambda_{4\times4}\begin{pmatrix} c\,dt \\ d\vec{x} \end{pmatrix}$, die diese Bedingung erfüllen, heissen Lorentz-Transformationen

Bsp: eine Drehung $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ mit $R^TR = \mathbb{1}_{3\times3}$

ist eine Lorentz-Trafo, denn:

$$\begin{pmatrix} c\,dt' \\ d\vec{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,dt \\ R\,d\vec{x} \end{pmatrix} \Rightarrow c^2dt'^2 - d\vec{x}'^2 = c^2dt^2 - d\vec{x}^T\underbrace{R^TR}_{=\mathbb{1}}d\vec{x} = c^2dt^2 - d\vec{x}^2$$

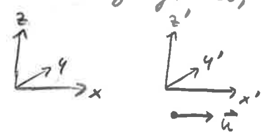
qed

- Boosts müssen verallgemeinert werden:

betrachte Boost in Richtung $\vec{u}$

≙ Drehung von $\vec{u}$ auf $|\vec{u}|\vec{e}_1$, dann Boost in $\vec{e}_1$-Richtg, dann Rückdrehung

⇝ oBdA genügt es, Boosts in x-Richtung zu betrachten,



$$\begin{pmatrix} c\,dt' \\ dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} A & B & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} c\,dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

((in den Richtungen $\perp \vec{u}$, d.h. y, z, passiert nichts ⇝ $\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}$; Richtungen ∥ und $\perp \vec{u}$ mischen nicht ⇝ $\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}$))

$A, B, C, D \in \mathbb{R}$ sind Fkt'n der Boost-Geschw. $u \equiv |\vec{u}|$

$\rightsquigarrow$ müssen nun $A, \dots, D$ bestimmen:

(a) wegen $\begin{pmatrix} c\,dt' \\ dx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\,c\,dt + B\,dx \\ C\,c\,dt + D\,dx \end{pmatrix}$ gilt für den Abstand

$$ds^2 = (A\,c\,dt + B\,dx)^2 - (C\,c\,dt + D\,dx)^2$$
$$= (A^2 - C^2)\,c^2 dt^2 + (B^2 - D^2)\,dx^2 + 2(AB - CD)\,c\,dt\,dx$$
$$\overset{!}{=} c^2 dt^2 - dx^2$$

$\Rightarrow A^2 - C^2 \overset{!}{=} 1 \;,\quad D^2 - B^2 \overset{!}{=} 1 \;,\quad AB - CD \overset{!}{=} 0$

nenne $A \equiv \gamma$; $\gamma^2 = 1 + C^2 \geq 1$, insbesondere $\gamma \neq 0$

$B = \frac{CD}{\gamma}$, $D^2 - B^2 = D^2\left(1 - \frac{C^2}{\gamma^2}\right) = D^2\left(1 - \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}\right) = \frac{D^2}{\gamma^2} = 1$

$\Rightarrow D = \pm\gamma$

(b) für $u \to 0$ muss natürlich $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gelten.

also ist wegen $\gamma^2 \geq 1$ auch immer $\gamma \geq 1$ (und nicht $\gamma \leq -1$).

ebenfalls $D = +\gamma$

sowie $B = \frac{CD}{\gamma} = C = \pm\sqrt{\gamma^2 - 1}$

(c) betrachte $dx = 0$ (zwei Ereignisse am Ursprung von Σ)

$\rightsquigarrow$ es gilt dann $dx' = -u\,dt'$ (da sich Σ mit $-\vec{u}$ bzgl. Σ' bewegt)

$dx = 0$: $\left\{\begin{matrix} c\,dt' = A\,c\,dt \\ dx' = C\,c\,dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{C}{A} = \frac{dx'}{c\,dt'} = -\frac{u}{c} \equiv -\beta < 0$

$\rightsquigarrow$ wegen (b) ist $(A = \gamma \geq 1)$ dann $C = -\sqrt{\gamma^2 - 1} < 0$

$\rightsquigarrow$ wegen $C = -\beta A = -\beta\gamma$ folgt $(C^2 = C^2)$

$\beta^2\gamma^2 = \gamma^2 - 1 \Leftrightarrow 1 = \gamma^2(1 - \beta^2) \Rightarrow \gamma = +\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

$\Rightarrow$ insgesamt also $\left(\beta = \frac{u}{c}\right)$

$A = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

$C = -\beta\gamma$

$B = C = -\beta\gamma$

$D = \gamma$

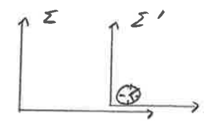
$\Leftrightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bem.: • Drehmatrix $R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \det R = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

• Boostmatrix $B = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2} = 1$

$\rightsquigarrow$ physikalische Konsequenzen:

• Zeitdilatation



eine Uhr ruhe am Σ'-Ursprung,

also $dx' = 0$; wie lautet die Beziehung zwischen dt, dt' ?

$\begin{pmatrix} c\,dt' \\ dx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,dt \\ dx \end{pmatrix}$; es ist $\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$ $(\beta \to -\beta)$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c\,dt \\ dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,dt' \\ dx' \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ (1.Z.) $c\,dt = \gamma\,c\,dt' + \beta\gamma \underbrace{dx'}_{=0} \Leftrightarrow dt = \gamma\,dt' \overset{\gamma \geq 1}{\geq} dt'$

$\Rightarrow$ d.h. die bewegte Uhr geht von Σ aus gesehen langsamer !

• Längenkontraktion

ein Stab ruhe in Σ', mit Ruhelänge $L' \equiv dx'$.

eine Messung der Stablänge bzgl. Σ , mit $dt = 0$ gibt:

$dx' = \gamma\,dx \Leftrightarrow dx = \frac{dx'}{\gamma} = \frac{L'}{\gamma} \leq L'$

$\Rightarrow$ d.h. der bewegte Stab scheint bzgl. Σ verkürzt !

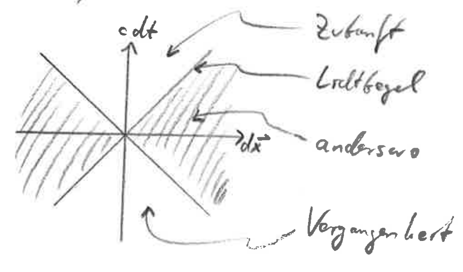
Bem.: • Abstände mit $ds^2 = 0$ heissen "lichtartig"

• Abstände mit $ds^2 = c^2dt^2 - d\vec{x}^2 > 0$ heissen "zeitartig"

(wegen $|d\vec{x}| < c\,dt$ kann man die Ereignisse mit Geschw. $\frac{|d\vec{x}|}{dt} < c$ verbinden)

• Abstände mit $ds^2 < 0$ heissen "raumartig"

(solche Ereignisse können einander nicht kausal beeinflussen)



5.2 Vierervektoren

→ brauchen eine gute/elegante Notation für Spez. Rel.

- def $dx = \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}$ mit $dx^0 \equiv c\,dt$

dx ist ein 4-Vektor, mit Komponenten dx^μ, $\mu \in \{0,1,2,3\}$

Vereinbarung: griechische Indizes laufen von 0…3
lateinische Indizes laufen von 1…3

- schreibe Lorentz-Trafo als

$dx' = \Lambda\, dx$, mit $\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \vdots & & \ddots & \end{pmatrix}$

Matrixschreibweise
Komponentenschreibweise

$dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, dx^\nu$ (Summenkonvention; jetzt für Indizes, die einmal unten und einmal oben vorkommen)

- allg.: $A = \begin{pmatrix} A^0 \\ \vdots \\ A^3 \end{pmatrix}$ ist ein 4-Vektor, falls sich die Komponenten von A^μ wie $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$ transformieren.

⇝ Frage: kann man 4-Skalare konstruieren,
d.h. Größen, die unter Λ invariant sind?

((Erinnerung: für Drehungen: $\vec{x}$ Vektor $\Rightarrow \vec{x}^2 = \vec{x}\cdot\vec{x}$ Skalar;
jetzt soll aber $ds^2 = (dx^0)^2 - d\vec{x}\cdot d\vec{x}$ invariant bleiben))

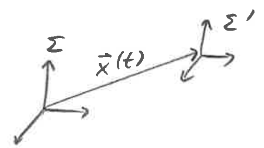
- def $A_0 \equiv A^0$, $A_i \equiv -A^i$ (für $i = 1,2,3$)

$A^2 \equiv A^\mu A_\mu = (A^0)^2 - \vec{A}\cdot\vec{A}$ Viererskalarprodukt

d.h. ds^2 ist ein 4-Skalar
i.A. sind 4-Skalarprodukte A^2 4-Skalare.

Bem.: das 4-Skalarprodukt ist nicht positiv definit!

Bsp (Eigenzeit eines Teilchens mit Bahnkurve $\vec{x}(t)$)



betrachte zwei Ereignisse; auf Teilchen-fester Uhr z.B. ⌚ = a, ⌚ = b

in Σ: Geschw. zwischen a,b sei konstant
Zeitintervall: dt
Abstand: $d\vec{x} = \dot{\vec{x}}(t)\,dt = \vec{v}(t)\,dt$

in Σ': Zeitintervall: $d\tau$, τ = "Eigenzeit"
Abstand: $d\vec{x}' = 0$

ds^2 ist invariant $\Rightarrow ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 = c^2 dt^2 - \vec{v}^2 dt^2$

$\Leftrightarrow d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2(t)}{c^2}}$

⇒ Eigenzeitintervall $d\tau \equiv \sqrt{\frac{ds^2}{c^2}}$ ist 4-Skalar

Bsp def. Vierergeschwindigkeit

$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \begin{pmatrix} c \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}$

u^μ ist 4-Vektor, weil dx^μ 4-Vektor und $d\tau$ 4-Skalar ist.

Bsp $u^2 = u^\mu u_\mu = \frac{1}{1 - \vec{v}^2/c^2}(c^2 - \vec{v}^2) = c^2$ ist 4-Skalar

Bsp $(A+B)^2 = (A^\mu + B^\mu)(A_\mu + B_\mu) = A^2 + B^2 + A^\mu B_\mu + B^\mu A_\mu$

$= A^2 + B^2 + A^0 B^0 - \vec{A}\cdot\vec{B} + B^0 A^0 - \vec{B}\cdot\vec{A}$

$= A^2 + B^2 + 2A\cdot B$

invariant

⇒ $A\cdot B$ $(= A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu)$ ist invariant ∀ 4-Vektoren A, B

def A^μ heisst kontravarianter 4-Vektor
A_μ heisst kovarianter 4-Vektor

Verhalten unter Lorentz-Trafo (vgl. S. 67): $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$

→ wie werden kovariante 4-Vektoren transformiert?

sei $A'_\mu \equiv A_\alpha M^\alpha{}_\mu$

dann ist $A' \cdot B' = A'_\mu B'^\mu = A_\alpha M^\alpha{}_\mu \Lambda^\mu{}_\beta B^\beta$

(Invarianz) → $\stackrel{!}{=} A \cdot B = A_\alpha B^\alpha \quad \forall\, A, B$

$\Rightarrow M^\alpha{}_\mu \Lambda^\mu{}_\beta \stackrel{!}{=} \delta^\alpha{}_\beta \equiv \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = \beta \\ 0 & \text{für } \alpha \neq \beta \end{cases}$ (Kronecker-Delta)

Komponentenschreibweise

Matrixschreibweise

$M \Lambda \stackrel{!}{=} \mathbb{1} \quad \Leftrightarrow \quad M \stackrel{!}{=} \Lambda^{-1}$

$\Rightarrow$ kovariante Vektoren transformieren sich als $A'_\mu = A_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$

→ Verallgemeinerung: Vierertensoren

- wenn $T^{\mu\nu}$ wie $A^\mu B^\nu$ transformiert, nennt man T einen kontravarianten Tensor zweiter Stufe
- kovariante Tensoren werden wie kovariante Vektoren gebaut: (vgl. S. 67)

  $T_{ij} = -T^i{}_j = -T_i{}^j = +T^{ij}$ Minuszeichen im räuml. Teil

  $T_{0i} = T^0{}_i = -T_0{}^i = -T^{0i}$

  kovariante Tensoren transformieren dann wie $A_\mu B_\nu$
- Symm/Antisymm eines Tensors $(T^{\mu\nu} = \pm T^{\nu\mu})$ ist invariant:

  $T'^{\nu\mu} = \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\mu{}_\alpha T^{\beta\alpha} = \pm \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\mu{}_\alpha T^{\alpha\beta} = \pm T'^{\mu\nu}$
- Kontraktion $T^\mu{}_\mu$ gibt einen 4-Skalar
- Kronecker-Delta ist ein invarianter Tensor, denn:

  $\delta'^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\alpha (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu \delta^\alpha{}_\beta = \Lambda^\mu{}_\alpha (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\nu = (\Lambda\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$

→ metrischer Tensor

def $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- es ist $\eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, $\eta^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}$
- es gilt $A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$, $A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu$, $A^2 = A^\mu \eta_{\mu\nu} A^\nu$
- betrachte L.-Trafo eines kovar. Vektors (vgl. S. 69)

  $A'_\mu = A_\alpha (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu$

  jetzt $\stackrel{!}{=} \eta_{\mu\nu} A'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta A^\beta = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta \eta^{\beta\alpha} A_\alpha$

  $\Leftrightarrow (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta \eta^{\beta\alpha} = \eta^{\alpha\beta} \Lambda^\nu{}_\beta \eta_{\nu\mu}$

  Komponentenschreibweise

  Matrixschreibweise

  $\boxed{\Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta}$ ((könnten dies auch als Def. von Λ nehmen))
- vgl. mit Drehmatrix: $R^T R = \mathbb{1} \Rightarrow R^{-1} = R^T$

  d.h. $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & R \end{pmatrix}$ ist Lorentz-Trafo, denn:

  $\eta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}^T \eta \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -R^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^T \end{pmatrix}$

  $\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} = \Lambda^{-1}$ ✓

5.3 Relativistische Mechanik

hier: kurzer Einblick in Umformulierung der klass. Mechanik mit 4-Vektoren etc.

Ziel: Verallg., die auch für $|\vec{v}| \approx c$ gültig ist:
Grundgesetze der Physik müssen in allen Inertialsystemen dieselbe Form haben (Relativitätsprinzip)

$\leadsto$ mehr: Theo II

z.B. $A'^\mu = B'^\mu \Leftrightarrow 0 = A'^\mu - B'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu (A^\nu - B^\nu) \overset{\exists \Lambda^{-1}}{\Leftrightarrow} A^\nu = B^\nu$

$\Rightarrow$ schreibe Grundgesetze als Gleichungen zwischen 4-Vektoren, 4-Skalaren etc.

Ausgangspkt z.B. Hamiltonsches Prinzip (s. §2.2, S.26):

- Wirkung S sei extremal
  $\uparrow$ reelle Zahl $\to$ sollte 4-Skalar sein

nichtrel.: $S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L$ mit $L = \frac{m}{2}\vec{v}^2$ $\quad (\vec{v} = \dot{\vec{x}})$

Raumzeit homogen $\Rightarrow$ $S(\cancel{\vec{x}}, \cancel{t})$

wissen aus §5.2, dass $d\tau = \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}\, dt$ L-invariant ist
"Herzschlag" des Teilchens

Ansatz $S \overset{!}{=} -\alpha \int_1^2 d\tau$, α eine (zu best.) Konstante

$= \int_{t_1}^{t_2} dt\, L$ mit $L = -\alpha\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} \approx -\alpha\left(1 - \frac{\vec{v}^2}{2c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{v^4}{c^4}\right)\right)$
A B

A Konstante hat keinen Einfluss auf EL-Glg. (vgl. S.26)

B muss nichtrel. Limes ergeben! $\Rightarrow \alpha = mc^2$

$\Rightarrow L = -mc^2\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} \quad (\equiv -mc^2\sqrt{}\,)$

- betrachte kanonisch konjugierten Impuls (s. §2.4, S.32)

$p^i = \partial_{\dot{x}^i} L = -mc^2 \partial_{v^i}\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\sum_j v^j v^j} = -mc^2 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{}}\left(-\frac{1}{c^2} 2 v^i\right)$
$= \frac{mv^i}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}}$

((check: nichtrel. Limes $p^i \approx mv^i(1 + \mathcal{O}(v^2/c^2))$ ✓✓))

- betrachte Energie (s. §2.4, S.31)

$E = \sum_i p^i \dot{x}^i - L = \frac{m\vec{v}^2}{\sqrt{}} + mc^2\sqrt{} = \frac{m}{\sqrt{}}(v^2 + c^2 - v^2)$
$= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}}$

((check: $E \approx mc^2 + \frac{m}{2}\vec{v}^2 + \mathcal{O}\left(\frac{v^4}{c^4}\right) \equiv E_{Ruhe} + E_{kin} + \dots$))

- basteln nun einen 4-Vektor aus E, p^i:

$u = \frac{1}{\sqrt{}}\begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$ war 4-Vektor (vgl. §5.2, S.68)

$\Rightarrow$ def $p \equiv \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \frac{m}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}}\begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} = m\, u$
p: 4-Vektor; u: 4-Vektor; m: 4-Skalar (Ruhemasse)

Eigenschaften von p^μ

- $p^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 = m^2 u^2 = m^2 c^2 \quad \Leftrightarrow \quad E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2 c^2$

$\Leftrightarrow E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2} = mc^2\sqrt{1 + \vec{p}^2/m^2c^2} \approx mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{(\vec{p}^2)^2}{8m^3c^2} + \mathcal{O}(p^6)$

- Geschw. $\vec{v}$ aus p^μ berechnen?

aus p-def.: $\frac{\vec{v}}{c} = \frac{\vec{p}}{p^0} = \frac{\vec{p}c}{E}$

sowie $\vec{\nabla}_{\vec{p}} E = \sum_i \vec{e}_i \partial_{p^i}\sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2} = \sum_i \vec{e}_i \frac{1}{2}\frac{2p^ic^2}{E} = \frac{\vec{p}c^2}{E}$

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{\nabla}_{\vec{p}} E$ ((und $|\vec{v}| \to c$ wenn $|\vec{p}| \to \infty$))

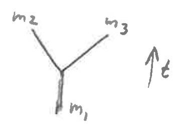
- $E, \vec{p}$ erhalten $\Leftrightarrow$ p^μ erhalten

Bsp am LHC (Large Hadron Collider, CERN bei Genf)
wurden Protonen (Ruhemasse $m = 938 \frac{MeV}{c^2} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,kg$)
auf Energie 7 TeV$^{(*)}$ beschleunigt; $v = ?$

$$\left(\begin{array}{l} k = 10^3 \\ M = 10^6 \\ G = 10^9 \\ T = 10^{12} \\ \vdots \end{array}\right)$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Leftrightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 + \dots$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{938 \cdot 10^6}{7 \cdot 10^{12}}\right)^2 = 1 - 8{,}98 \cdot 10^{-9}$$
$$= 0{,}999\,999\,991 \dots$$

Bsp ein Teilchen zerfällt in 2 andere;
$\underline{E_2}$ im Ruhesystem von m_1 (CMS)?



4-Impulse: $p_1 = \begin{pmatrix} m_1 c \\ \vec{0} \end{pmatrix}$ $p_2 = \begin{pmatrix} E_2/c \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix}$ $p_3 = \begin{pmatrix} E_3/c \\ \vec{p}_3 \end{pmatrix}$

(a) über E-$\vec{p}$-Erhaltung:

$p_1 = p_2 + p_3 \Rightarrow (\mu = 1,2,3)\ \ \vec{0} = \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \Rightarrow \vec{p}_3 = -\vec{p}_2$

$\Rightarrow (\mu = 0)\ \ m_1 c = \sqrt{m_2^2c^2 + \vec{p}_2^{\,2}} + \sqrt{m_3^2c^2 + \vec{p}_2^{\,2}}$

$\rightsquigarrow$ nach $\vec{p}_2^{\,2}$ auflösen … dann in E_2 einsetzen …

(b) direkter Weg: $E_2 = \frac{1}{m_1} m_1 c \frac{E_2}{c} = \frac{1}{m_1} p_1 \cdot p_2$
$$= \frac{1}{2m_1}\left(p_1^2 + p_2^2 - (p_1 - p_2)^2\right) = \frac{1}{2m_1}\left(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2\right)$$

(*) bisher (2012) erst 4 TeV

$\Leftrightarrow \frac{v}{c} \approx 1 - 2{,}75 \cdot 10^{-8} \approx 0{,}999\,999\,97 \dots$

(B) Elektrodynamik (ED)

→ zwei Knaller vorweg:

- ED führt erstmals zu einer vollständigen[1] Theorie, welche allerdings nur einen Teilbereich[3] der Natur regiert, und zwar falsch[2]
- ED enthält eine verborgene Symmetrie (relativistische Invarianz)

---

(1) genügend viele Gln. legen die Zukunft fest
($m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$? Gln. für $\vec{F}$! "zweite Hälfte der Theorie")

(2) **betrachte** $\boxed{ED}\,/\,T$: ED + Temperatur = Unfug (∞)

zB Kondensator im Standardmodell;
ED ist Karikatur der Wirklichkeit (falsch und gut)

(3) Blick auf Ganzes

$$\boxed{\frac{ED}{M}} \to \boxed{\frac{ED}{Rel.M}} \to \boxed{\frac{ED}{QM}} \to \boxed{\left.\begin{array}{c} QE \\ Rel\,QM \end{array}\right\}\ QED} \xrightarrow{\text{mehr}} \boxed{\begin{array}{l}\text{Standardmodell} \\ \text{der elektro-} \\ \text{schwachen und} \\ \text{starken Ww}\end{array}}$$

$\boxed{\text{allg. Rel.: Gravitation}}$ + Q ?

?

wir sind "am Anfang"!

6. Grundbegriffe der Elektrodynamik (ED)

(Postkarte aus 1863)

(kennen schon aus §1.2, und Ü15)

$$\boxed{\begin{array}{llll} \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho & (1) & \operatorname{rot} \vec{E} + \dot{\vec{B}}/c = \vec{0} & (2) \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 & (3) & \operatorname{rot} \vec{B} - \dot{\vec{E}}/c = 4\pi\vec{j}/c & (4) \\ & & & \\ m\ddot{\vec{r}} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right) = \vec{F}_{Lorentz} & & & \end{array}}$$

"first principles" der emm Welt;
(elektromagnetisch-mechanisch)

c = Konstante = "Lichtgeschwindigkeit" $\equiv 299\,792\,458$ m/s (exakt; → Meter)

6.1 Ladungen (elektrische): $q, \varrho, \vec{j}$

- $\exists$ Teilchen (T.); zu jedem T. identische weitere; 2 T. bemerken einander,

Wechselwirkung: Grav. schwache em starke

Kraft $\sim$ $1/r^2$ kurzreichw. $1/r^2$ kurzreichweitig

$\underbrace{}$

ZB e-e: rel. Stärke 10^{-43}

$\rightsquigarrow$ man kann einen Vorgänge isolieren.

- in Mechanik: T. idealisiert als Massenpunkte (MP), Masse m
jetzt bekommen MP weitere Eigenschaft: elektrische Ladung q

} additiv: T. zusammenkleben $M = m_1 + m_2$, $Q = q_1 + q_2$

- Ladungen erzeugen el. + magn. Felder $\vec{E}, \vec{B}$ (via Max 1–4)
Felder üben Kräfte auf Ladungen aus (via $\vec{F}_L$)

$\rightsquigarrow$ ED beschreibt gekoppeltes Syst. aus MP + Feldern

- geladene T. können strömen

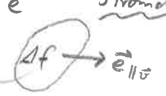
def $\quad \varrho(\vec{r},t) = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\text{Ladung (in } \Delta V \text{ bei } \vec{r} \text{ zu } t)}{\Delta V}$ Ladungsdichte

oft: $(\text{atomare Länge})^3 \ll \Delta V \ll \left(\begin{matrix}\text{interessierende}\\ \text{Längenskala}\end{matrix}\right)^3$

z.B Punktladungen: $\varrho(\vec{r}) = \sum\limits_a q_a\, \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_a)$

$\Rightarrow$ Gesamtladung in Volumen V: $\quad Q = \int_V d^3\vec{r}\ \varrho(\vec{r})$

def $\quad \vec{j}(\vec{r},t) = \lim\limits_{\substack{\Delta f \to 0\\ \Delta t \to 0}} \dfrac{\text{Ladung (in } \Delta t \text{ durch } \Delta f \text{ bei } \vec{r} \text{ zu } t)}{\Delta f \cdot \Delta t}\ \vec{e}$ Stromdichte



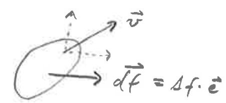
falls ϱ die Dichte der Ladungen ist,
die sich (bei $\vec{r}$ zu t) mit $\vec{v}$ bewegen, dann

$= \lim \dfrac{\text{Ladung } (\dots)}{\Delta f \cdot v \cdot \Delta t}\, v\vec{e} = \varrho(\vec{r},t) \cdot \vec{v}(\vec{r},t)$

$\Delta f \cdot v \cdot \Delta t$: Vol, das in Δt durch Δf geht

Bem. falls die Ladungen sich nicht $\perp$ durch Δf bewegen,
ist der Strom durch die $\perp$ Komponente gegeben:

$\Delta I = \vec{j} \cdot \vec{e} \cdot \Delta f = \vec{j} \cdot d\vec{f}$



- el. Ladung ist erhalten (analog zur T.-Zahl)

$\rightsquigarrow$ Ladung in einem Volumen V kann sich nur durch Ab- (oder Zu-) Fluss durch die Oberfläche ∂V ändern.

Gesamtstrom durch Fläche F: $\quad I_F(t) = \int_F d\vec{f} \cdot \vec{j}(\vec{r},t)$

Ladung innerhalb einer geschlossenen Fläche wird entsprechend kleiner:

$\dfrac{dQ}{dt} = -I \quad \Leftrightarrow \quad \partial_t \int_V d^3\vec{r}\ \varrho(\vec{r},t) = -\int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{j}(\vec{r},t) = -\int_V d^3\vec{r}\ \operatorname{div} \vec{j}$ (Satz v. Gauss)

$\Leftrightarrow \quad \int_V d^3\vec{r}\ (\partial_t \varrho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}) = 0$

dies gilt $\forall$ Volumenelemente V, insbes. infinitesi. kleine

$\Rightarrow \quad \boxed{\partial_t \varrho(\vec{r},t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r},t) = 0} \quad \forall\, \vec{r}, t \qquad$ Kontinuitätsgl.

Skalarfeld $\quad$ Vektorfeld

Bsp (Ldg. Q auf Metallkugel, Radius R)

$\varrho(\vec{r}) = \alpha\, \delta(r-R)\ , \quad Q = \int d^3\vec{r}\ \varrho = 4\pi \int_0^\infty dr\, r^2 \alpha\, \delta(r-R) = 4\pi\alpha R^2$

$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{Q}{4\pi R^2}$

Bsp (Strom I durch ∞ dünnen Draht auf z-Achse)

$\vec{j}(\vec{r}) = \alpha\, \delta(x)\,\delta(y)\, \vec{e}_3\ , \quad I = \int d\vec{f} \cdot \vec{j} = \int dx \int dy\ \vec{e}_3 \cdot \alpha\, \delta(x)\,\delta(y)\, \vec{e}_3 = \alpha$

Bsp (Punktladung q bei $\vec{r}_0(t)$)

$\varrho = q\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t))\ , \quad \vec{j} = \varrho \cdot \vec{v} = q\, \dot{\vec{r}}_0(t) \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$

$\rightsquigarrow$ s. auch Ü35

6.2 Maxwell-Gleichungen

- die auf S. 74 angegebenen Maxwell-Gln (1)–(4) benutzen ein spezifisches Einheitensystem:

  Gaußsches bzw cgs (cm, g, s) Maßsystem ;

  → dabei werden keine neuen Einheiten für die ED eingeführt, sondern man def. "Ladung" durch die mechanischen Einheiten (cm, g, s):

  (Max 1) : $[\vec E]/[x] = [q]/[x]^3 \Rightarrow [\vec E] = [q]/[x]^2$

  (Lorentz) : $[\vec F] = [m \frac{x}{t^2}] = [q][\vec E] = [q]^2/[x]^2 \Rightarrow [q^2] = [m \frac{x^3}{t^2}]$

  $\Rightarrow [\vec E^2] = [\frac{m}{x t^2}]$

- es gibt andere (als das Gaußsche) Maßsysteme ;

  allg. $\underset{\uparrow \text{Gauß}}{\vec E} = \sqrt{k\varepsilon_0}\, \underset{\uparrow \text{anderes Maßsystem}}{\vec E^*}$, $\vec B = \sqrt{\frac{k}{\mu_0}}\, \vec B^*$, $(q, \rho, \vec j) = \frac{1}{\sqrt{k\varepsilon_0}} (q^*, \rho^*, \vec j^*)$

  dann

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{div} \vec E^* = \frac{4\pi}{k\varepsilon_0} \rho^* \ , \quad \operatorname{rot} \vec E^* + \dot{\vec B}^* \Big/ \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 c^2} = 0 \\ \operatorname{div} \vec B^* = 0 \ , \quad \operatorname{rot} \vec B^* - \dot{\vec E}^* \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{c^2}} = \frac{4\pi}{kc} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, \vec j^* \\ \vec F_{\text{Lorentz}} = q^* \left(\vec E^* + \frac{\vec v}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 c^2}} \times \vec B^* \right) \end{array}}$$

- einige Maßsysteme: [vgl. auch Jackson, Anhang !!]

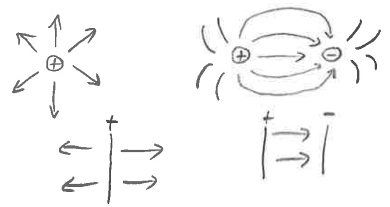
	ε_0	μ_0	k
Gauß	1	1	1
Heaviside-Lorentz	1	1	4π
SI	$\frac{1}{\mu_0 c^2}$	$\frac{4\pi}{10^7} \frac{N}{A}$	4π

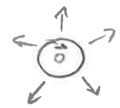
(ε_0: "Dielektrizitätskonstante"
μ_0: "Vakuumpermeabilität")

↳ N = Newton = $\frac{J}{m} = \frac{Ws}{m} = \frac{kg\, m}{s^2}$
W = Watt = VA = Volt · Ampere
(C = Coulomb = As)

anschaulicher Inhalt der Max

- (Max 1) $\operatorname{div} \vec E = 4\pi\rho$: wo Ladung, da $\vec E$-Quellen





, außen $\sim 1/r^2$

- (Max 2) $\operatorname{rot} \vec E = -\dot{\vec B}/c$: wo $\vec B$-Abnahme, da Wirbelstärke

  lange Spule, $\dot I < 0$, $-\dot{\vec B}$ nach oben

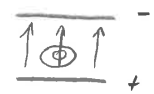
  da außen $B, \dot B = 0$ muss E langsam abnehmen, sonst große Rotation am Rand

- (Max 3) $\operatorname{div} \vec B = 0$: keine $\vec B$-Quellen ; $\vec B$-Feldlinien geschlossen !

- (Max 4) $\operatorname{rot} \vec B = \frac{4\pi}{c} \vec j + \dot{\vec E}/c$: wo $\vec j$ und/oder $\vec E$-Zunahme, da $\vec B$-Wirbel

  Draht, $\vec j$ nach oben

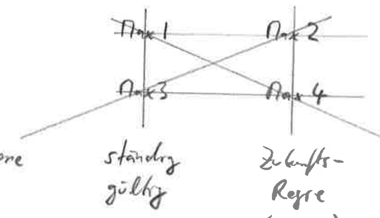
, Kondensator bei Aufladung



"enge" ED : betrachte im Folgenden (bis auf Widerruf) $\rho(\vec r, t)$, $\vec j(\vec r, t)$ als bekannt und Max 1–4 als Gln. für $\vec E, \vec B$

((Newton außen vor: keine Rückwirkungen Felder → Ladungen))

lesen als Paare



Max 1, Max 2: Elektrostatik
Max 3, Max 4: Magnetostatik
(Statik entkoppelt)
inhomogene (materielle) Max

erste Folgerungen aus Max

- Max $\Rightarrow$ Kontinuitätsglg.

  wenn (wie versprochen, s. S. 74) Theorie vollständig,

  dann muss die Kontinuitätsglg. der emm Welt auf Max folgen:

  $$\text{div (Max 4)}: \ \underbrace{\text{div rot } \vec{B}}_{= \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\ldots) = 0} = \frac{4\pi}{c}\Big(\text{div } \vec{j} + \underbrace{\frac{1}{4\pi}\text{div } \dot{\vec{E}}}_{\overset{(\text{Max 1})^{\cdot}}{=} \dot{\rho}}\Big) \qquad \text{qed}$$

- Welt-Anfangsbedingungen?

  Max 1-4 : 8 Glen. für 6 Unbekannte $(\vec{E}, \vec{B})$?⚡

  Max 1,3 herleitbar aus Max 2,4 ?

  $$\text{div (Max 2)}: \quad 0 = \text{div rot } \vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t \, \text{div } \vec{B}$$

  $$\Rightarrow \text{div } \vec{B} = \text{const}_t = \text{div } \vec{B}\,\big|_{\text{big bang}}$$

  und bei Ladungserhaltendem Input $(\dot{\rho} + \text{div } \vec{j} = 0)$

  $$\text{div (Max 4)}: \quad 0 = \text{div rot } \vec{B} = \frac{1}{c}\big(4\pi \, \text{div } \vec{j} + \text{div } \dot{\vec{E}}\big)$$

  $$= \frac{1}{c}\partial_t\big(\underbrace{\text{div } \vec{E} - 4\pi\rho}\big)$$

  $$\Rightarrow = \text{const}_t = (\text{div } \vec{E} - 4\pi\rho)\big|_{\text{big bang}}$$

- Eindeutigkeit von $\vec{E}, \vec{B}$ aus Max 1-4 ?

  Beh.: ja, wenn keine Ursachen bei $r = \infty$

  - Elektro/Magnetostatik: $\quad \text{div } \underset{(\vec{E} \text{ oder } \vec{B})}{\vec{A}} = \text{gegeben}, \quad \text{rot } \vec{A} = \text{gegeben}$

    $\Rightarrow$ hat nur eine in ∞ verschwindende Lsg $\vec{A}$

    (Theorem der Vektoranalysis)*

    $\rightsquigarrow$ Ansätze erlaubt beim Lösen von Max 1-4 !

  - Dynamik (Bsp: em Wellen entstehen), s. später

* $\vec{A}(\vec{r}) = \int \frac{d^3\vec{r}\,'}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\left(\text{rot } \vec{gg}(\vec{r}\,') - \text{grad } gg(\vec{r}\,')\right) + \vec{c}, \quad \Delta\vec{c} = \vec{0} \ \Rightarrow \ \vec{c} = \vec{0}$

- Max $\Rightarrow$ Coulomb (wie man Max per Ansatz löst)

  Q auf Metallkugel (R) : $\rho = \frac{Q}{4\pi R^2}\delta(r-R)$, $\vec{j} = 0$ (s. S. 76)

  "immer Max 1-4 abarbeiten!" :

  Statik $\Rightarrow$ (Max 3,4) abgekoppelt von (Max 1,2) $\Rightarrow$ $\vec{B} = \vec{0}$

  Ansatz $\quad \vec{E} = \vec{r} f(r) \quad \Rightarrow$ (Max 2) ? (malen!) $\quad \vec{0} = \vec{0}$ ✓

  in (Max 1) einsetzen: $\quad \vec{\nabla}\cdot\begin{pmatrix} xf \\ yf \\ zf \end{pmatrix} = 3f + rf' \overset{!}{=} \frac{Q}{R^2}\delta(r-R)$

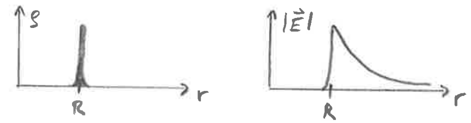
  $\quad\quad ((\partial_x r = \frac{x}{r}))$

  Ans $\quad f(r) = r^\lambda g(r) \quad \Rightarrow \quad 3r^\lambda g + \lambda r^\lambda g + r^{\lambda+1} g' = \frac{Q}{R^2}\delta(r-R)$ $\quad R^2 \to r^2$ wegen δ erlaubt

  wähle $\lambda = -3 \quad : \quad g' = Q\,\delta(r-R)$

  $\Leftrightarrow \quad g = Q\,\theta(r-R) + \text{const}$

  $\Rightarrow \quad \vec{E} = \vec{e}_r \frac{Q}{r^2}\theta(r-R) + \cancel{\vec{e}_r \frac{\text{const}}{r^2}} = 0$, da am Ursprung keine Punktquelle ist



((es folgt die "Coulomb"-Kraft $\quad \vec{F} = q(\vec{E} + \cancel{\tfrac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}}^{\,0}) = \vec{e}_r \frac{qQ}{r^2}\theta$ ✓))

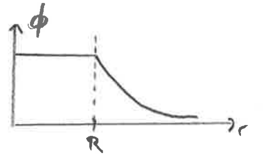
(auf Probeladung q

$\rightsquigarrow$ kann man $\vec{E} \equiv -\vec{\nabla}\phi(r) = -\vec{e}_r\,\phi'(r)$ schreiben?

((dann $\vec{F} = -\vec{\nabla}V(r)$, mit Potential $V(r) = q\phi(r)$))

$\Rightarrow$ geht, mit

$$\phi(r) = \begin{cases} Q/r & \text{außen} \\ Q/R & \text{innen} \end{cases} \qquad \text{Coulomb-Potential}$$



(wegen Stetigkeit bei $r = R$, damit grad kein δ produziert ($\vec{E}$ hat keins!))

6.3 Potentiale, Eichfreiheit

→ unsere Beobachtung im letzten Bsp ist allgemein:

(vgl. §1.2, S.7) $\vec{F} = -\vec{\nabla} V \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$

((auf S.80 hatten wir (Max 2) $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \overset{0 \text{ statisch!}}{\dot{\vec{B}}/c} = \vec{0}$))

⇒ in Elektrostatik existiert wegen $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$

stets ein "elektrostatisches Potential" oder "Skalarpotential"

ϕ, mit $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ ((für einfach zusammenhängende Gebiete))

(analog zu S.8:) $\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{E}(\vec{r}')$

Integral ist unabhängig vom Integrationsweg!

- benutze dies in (Max 1):

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \Rightarrow \vec{\nabla}^2 \phi = -4\pi\rho$ Poisson-Glg

(manchmal $\vec{\nabla}^2 \equiv \Delta$ "Laplace-Op.")

im Vakuum ($\rho = 0$): $\vec{\nabla}^2 \phi = 0$ Laplace-Glg

- für die Metallkugel von S.80:

$\Delta\phi = -4\pi Q \underbrace{\frac{1}{4\pi R^2}\delta(r-R)}$

ist wegen $\int d^3r \frac{1}{4\pi R^2}\delta(r-R) = 1$

zu $R \to 0$ ein $\delta(\vec{r})$ - Darstellung

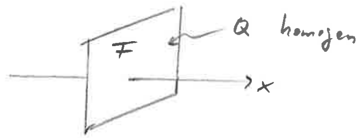
$\Rightarrow \Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{r})$

$\Leftrightarrow \Delta\left(-\frac{1}{4\pi r}\right) = \delta^{(3)}(\vec{r})$ (($-\frac{1}{4\pi r}$ ist Greensche Fkt (s. später) von Δ))

- ϕ-Differenzen nennt man auch "Spannung"

$[\phi] = [x][\vec{E}]$; ((in SI: $[\phi] = m \cdot \frac{N}{C} = V =$ Volt))

Bsp (Kondensator)



1 Platte: $\rho = \frac{Q}{F}\delta(x)$

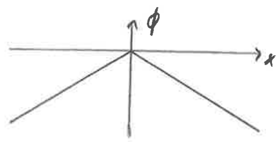
müssen (Max 1) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{4\pi Q}{F}\delta(x)$ lösen

Ansatz: $\vec{E} = \vec{e}_1 f(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{4\pi Q}{F}\delta(x)$

$\Rightarrow f = \frac{4\pi Q}{F}\Theta(x) + \text{const}$; Symmetrie ⇝ $C = -\frac{2\pi Q}{F}$

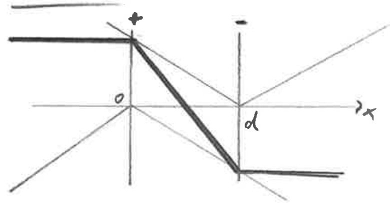
$\Rightarrow \vec{E} = \frac{2\pi Q}{F}\,\text{sign}(x)\,\vec{e}_1 \overset{!}{=} -\partial_x \phi(x)\,\vec{e}_1$

$\Rightarrow \phi(x) = -\frac{2\pi Q}{F}|x|$



Potential pos. Platte

2 Platten:



via Superposition!

Spannung $= 2 \cdot \frac{2\pi Q}{F} \cdot d$

Kapazität $= \frac{Q}{\text{Spannung}} = \frac{F}{4\pi d}$

- Superposition (allg.)

Max $(\rho_I, \vec{j}_I ; \vec{E}_I, \vec{B}_I)$

Max $(\rho_{II}, \vec{j}_{II} ; \vec{E}_{II}, \vec{B}_{II})$

Max linear: Max $(\rho_I + \rho_{II}, \ldots ; \vec{E}_I + \vec{E}_{II}, \ldots)$

z.B. $\phi(\vec{r}) = \sum_a \frac{q_a}{|\vec{r}-\vec{r}_a|} \underset{\text{Kont.-Limes}}{=} \int_V d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_a q_a \frac{\vec{r}-\vec{r}_a}{|\vec{r}-\vec{r}_a|^3} = \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$

} Skalarpot. und el. Feld von (vielen) Punktladgn.

- Potentiale (die immer existieren)

schreibe $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ – "Vektorpotential" ((nicht eindeutig, aber ex. (s.u. *)))

$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \partial_i \varepsilon^{ijk}\partial_j A^k = 0$

(Max 3) folgt!

$\Rightarrow$ (Max 2): $\vec{\nabla}\times(\vec{E} + \dot{\vec{A}}/c) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{E} + \dot{\vec{A}}/c = -\vec{\nabla}\phi$

$\rightarrow \boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}}/c \quad , \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}}$

- Freiheitsgrade? 6 Felder $(E_i, B_i) \rightarrow$ 4 Potentiale (ϕ, A_i)
8 Maxwell-Gln $\rightarrow$ 4 Gln (Max 1), (Max 4)
(denn Max 2,3 automatisch erfüllt).

- Potentiale in Max 1,4 einsetzen

(Max 1) $-\Delta\phi - \frac{1}{c}\partial_t \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 4\pi\varrho$

(Max 4) $\underbrace{\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})}_{(\text{bac-cab}) \,=\, \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \Delta\vec{A}} + \frac{1}{c^2}(c\vec{\nabla}\dot{\phi} + \ddot{\vec{A}}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$

def $\square = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta$ d'Alembert-Op., Box, Quabla

$\Rightarrow \square\phi = 4\pi\varrho + \frac{1}{c}\partial_t[\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\dot{\phi}] \quad \hat{=}$ (Max 1)

$\square\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} - \vec{\nabla}[\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\dot{\phi}] \quad \hat{=}$ (Max 4)

$\rightsquigarrow$ können diese beiden Gln. noch vereinfachen, s.u. (S.86)

(*) ein mögliches $\vec{A}$ ist ($\vec{\nabla}\cdot\vec{B}$ beachtend):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\int_0^y dy'\, B_3(x,y',z) \\ +\int_0^x dx'\, B_3(x',y,z) \\ \int_0^y dy'\,[B_1(xy'z) + B_1(0y'z)] - \int_0^x dx'\,[B_2(x'yz) + B_2(x0z)] \end{pmatrix}$$

((check: $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ bilden, $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ ausnutzen, $\vec{B}$ herausbekommen))
$\rightsquigarrow$ Ü?!

$\rightsquigarrow$ Eindeutigkeit der Potentiale $\phi, \vec{A}$?

- Eichfreiheit

wegen $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ ist $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$ ohne Effekt auf $\vec{B}$

aber dann $\vec{E} \rightarrow -\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}}/c - \vec{\nabla}\dot{\chi}/c$

$\Rightarrow \vec{E}, \vec{B}$ invariant gegenüber

$\phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c}\dot{\chi} \quad , \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \quad , \quad \chi(\vec{r}, t)$ beliebig

Bem.:
- bei Variation von χ durchlaufen $\phi_{neu} = \phi_{alt} - \frac{1}{c}\dot{\chi}$, $\vec{A}_{neu} = \vec{A}_{alt} + \vec{\nabla}\chi$ den "Eichorbit"
- Möglichkeiten, Stellen/Bereiche des Eichorbits festzulegen:

(a) $\vec{A}$ liegt fest (sofern bei $r\to\infty$ abfallend),
wenn man $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B}$ = gegeben
um $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ = wählen ergänzt
(($\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_{neu}$ = gewählt = $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_{alt} + \Delta\chi$ nach χ lösen ...))

(b) ϕ wegeichen? $\frac{1}{c}\dot{\chi} = \phi_{alt} \rightsquigarrow \chi(\vec{r},t) = \chi(\vec{r},0) + \int_0^t dt'\,\phi_{alt}(\vec{r},t')$

(c) z.B. A_3 wegeichen? ja, geht analog zu (b)
$\vec{e}_3\cdot\vec{A} = 0$; auch $\vec{n}\cdot\vec{A} = 0$ ist möglich

- einige häufig verwendete Eichfixierungen:

Lorentz-Eichung	$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\dot{\phi} = 0$
Coulomb-Eichung	$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$
temporal gauge	$\phi = 0$
axial gauge	$\vec{n}\cdot\vec{A} = 0$

- Physik (Natur) ist (muss sein) eichinvariant!

Bsp (geladenes Teilchen in $\vec{E}, \vec{B}$)

das einzige Mechanik-Problem der emm Welt: $m\ddot{\vec{r}} = q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B})$

→ zugehörige Lagrange-Fkt hat also Rang eines first principles.

Beh: $\boxed{L = \frac{m}{2}\vec{v}^2 - q\phi + q\frac{\vec{v}}{c}\vec{A}}$ (nichtrel. Grenzfall)

s. Ü15 ((↳ $-mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}$ für Rel., vgl. §5.3, S.71))

denn: Bwgln $\frac{d}{dt}\partial_{\dot{q}_i} L = \partial_{q_i} L$ $(q_i : \vec{r},\ \dot{\vec{r}} \equiv \vec{v})$

brauchen $\partial_{\vec{v}} L = m\vec{v} + \frac{q}{c}\vec{A}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\partial_{\vec{v}} L = m\dot{\vec{v}} + \frac{q}{c}\Big(\dot{\vec{A}} + \underbrace{(\partial_t r_i)\partial_{r_i}}_{\Sigma}\vec{A}\Big) \quad ((\text{wg. } \vec{A}(\vec{r}(t),t)))$$

$$= m\dot{\vec{v}} + \frac{q}{c}\left(\dot{\vec{A}} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\right)$$

$$\partial_{\vec{r}} L = -q\vec{\nabla}\phi + q\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{A}\right)$$

$$\Rightarrow \text{Bwgl} \quad m\dot{\vec{v}} = q\left(-\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}}/c\right) + \frac{q}{c}\Big[\vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A}) - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\Big]$$

$$(= \vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}))$$

$$= q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right) \quad \text{qed}$$

→ gehe nun per $\phi \to \phi - \dot{\chi}/c$, $\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$ zu anderen Potentialen über; dann reflektiert

$$L \to L + \frac{q}{c}\dot{\chi} + \frac{q}{c}\dot{\vec{r}}\cdot\vec{\nabla}\chi = L + \frac{d}{dt}\left(\frac{q}{c}\chi\right)$$

totale Abl. lässt Bwgln. invariant, vgl. §2.2 (S.26)

die Eichinvarianz der Realität.

→ verallg. Impulse $\vec{p} \equiv \partial_{\vec{v}} L = m\vec{v} + \frac{q}{c}\vec{A}$

Hamilton-Fkt $H = \vec{v}\cdot\vec{p} - L = m\vec{v}^2 + \cancel{\frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}} - \frac{m}{2}\vec{v}^2 + q\phi - \cancel{\frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}}$

via $\vec{p}$ ausdrücken $H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + q\phi$

((diese Hamilton-Fkt wird von Mechanik → QM (ohne Spin) gerettet; in Kombination mit der Regel $\vec{p} \to \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$))

↝ zurück zu den Max 1,4 von S. 83:

- schreibe Max 1,4 mit Potentialen $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}}/c$, $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ und in Lorentz-Eichung $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \dot{\phi}/c = 0$

$$\Rightarrow \Box\begin{pmatrix}\phi\\ \vec{A}\end{pmatrix} = \frac{4\pi}{c}\begin{pmatrix}c\rho\\ \vec{j}\end{pmatrix}$$

(inhomogene) Wellengl.

↳ Lsg: s. später ((retardierte Potentiale))

- Nachtrag: oft werden die Max auch in integraler Form benutzt (wenn verwendbar, dann rentabel; "first principles" sind die lokalen Max von der Postkarte, S. 74):

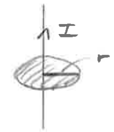
((Satz von Gauss $\int_V d^3\vec{r}\ \vec{\nabla}\cdot\vec{\ } = \oint_S d\vec{f}\cdot\vec{\ }$

Satz von Stokes $\int_S d\vec{f}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{\ }) = \oint_{\partial} d\vec{r}\cdot\vec{\ }$))

$$\Rightarrow \oint_S d\vec{f}\cdot\vec{E} = 4\pi\int_V d^3\vec{r}\,\rho\ , \quad \oint_C d\vec{r}\cdot\vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t\int_S d\vec{f}\cdot\vec{B} = \vec{0}$$

$$\oint_S d\vec{f}\cdot\vec{B} = 0\ , \quad \oint_C d\vec{r}\cdot\vec{B} - \frac{1}{c}\partial_t\int_S d\vec{f}\cdot\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\int_S d\vec{f}\cdot\vec{j}$$

Bsp



$B\cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c}\cdot I$

⇒ s. auch Ü37, Ü40

6.4 Rekapitulation, Beispiele

- die "Postkarte aus 1863":

$$\vec\nabla\cdot\vec E = 4\pi\rho \quad , \quad \vec\nabla\times\vec E + \dot{\vec B}/c = \vec 0$$
$$\vec\nabla\cdot\vec B = 0 \quad , \quad \vec\nabla\times\vec B - \dot{\vec E}/c = \tfrac{4\pi}{c}\vec j$$
$$m\dot{\vec v} = q\left(\vec E + \tfrac{\vec v}{c}\times\vec B\right)$$

Max 1 2 / 3 4

$\rho, \vec j$ gegeben
$\Rightarrow \vec E, \vec B$ eindeutig
$\rightsquigarrow$ Ansätze erlaubt

- (aus Spaß:) def $\vec\psi \equiv \vec E + i\vec B$

$\left(\Leftrightarrow \vec E = \mathrm{Re}\,\vec\psi = \tfrac12(\vec\psi + \vec\psi^*)\ ,\ \vec B = \mathrm{Im}(\vec\psi) = \tfrac{1}{2i}(\vec\psi - \vec\psi^*)\right)$

$\Rightarrow \vec\nabla\cdot\vec\psi = 4\pi\rho \quad , \quad \vec\nabla\times\vec\psi - \tfrac{i}{c}\dot{\vec\psi} = \tfrac{i}{c}4\pi\vec j$

- aus §6.3: es ex. (immer) Potentiale $\phi, \vec A$

$\vec E = -\vec\nabla\phi - \dot{\vec A}/c \ ,\ \vec B = \vec\nabla\times\vec A$ — erfüllt Max 2, 3

$$\Rightarrow \left(\tfrac{1}{c^2}\partial_t^2 - \vec\nabla^2\right)\begin{pmatrix}\phi\\ \vec A\end{pmatrix} = \tfrac{4\pi}{c}\begin{pmatrix}c\rho\\ \vec j\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\tfrac1c\partial_t\\ -\vec\nabla\end{pmatrix}\underbrace{\left(\vec\nabla\cdot\vec A + \dot\phi/c\right)}_{=0 \text{ in Lorentz-Eichung}}$$

Max 1, 4 — 4 Gln, 4 Freiheitsgrade

$$L = \tfrac{m}{2}\vec v^2 - q\phi + \tfrac{q}{c}\vec v\cdot\vec A$$

"Eich"invarianz: $\begin{pmatrix}\phi\\ \vec A\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\phi\\ \vec A\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\tfrac1c\partial_t\\ -\vec\nabla\end{pmatrix}\chi$ erlaubt, $\chi(\vec r, t)$ beliebig

- aus S. 86: Max in integraler Form, via Integralsätze

$$\left(\begin{array}{ll}\text{Gauss} & \int_V d^3r\ \vec\nabla\cdot\vec{\blacksquare} = \oint_{\partial V} d\vec f\cdot\vec{\blacksquare}\\ \text{Stokes} & \int_F d\vec f\cdot(\vec\nabla\times\vec{\blacksquare}) = \oint_{\partial F} d\vec r\cdot\vec{\blacksquare}\end{array}\right) \rightsquigarrow \text{bilde } \int_V d^3r\ \tfrac{\text{Max 1}}{\text{Max 3}}\ ,\ \int_F d\vec f\cdot\tfrac{\overrightarrow{\text{Max 2}}}{\overrightarrow{\text{Max 4}}}$$

$$\oint_{\partial V} d\vec f\cdot\vec E = \int_V d^3r\ 4\pi\rho \quad , \quad \oint_{\partial F} d\vec r\cdot\vec E + \tfrac1c\partial_t\int_F d\vec f\cdot\vec B = \vec 0$$
$$\oint_{\partial V} d\vec f\cdot\vec B = 0 \quad , \quad \oint_{\partial F} d\vec r\cdot\vec B - \tfrac1c\partial_t\int_F d\vec f\cdot\vec E = \tfrac{4\pi}{c}\int_F d\vec f\cdot\vec j$$

$\rightsquigarrow$ wenn anwendbar, dann rentabel (keine $\vec\nabla$ mehr!)
(aber auch immer per Ansatz via lokaler Max lösbar)

- ... später weitere Umformulierungen:
Max in der (Fourier-) Unterwelt ...

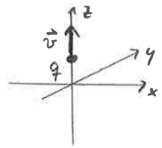
Bsp (Ladungsdichte → Ladung)

gegeben: $\rho(\vec r) = \frac{\alpha}{r^2}e^{-\beta r}\cos^2\theta$. Gesamtladung $Q = ?$

$$Q = \alpha\int_0^\infty dr\, r^2\frac{e^{-\beta r}}{r^2}\int_0^\pi d\theta\,\sin\theta\cos^2\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$$
$$= \alpha\left(-\tfrac1\beta e^{-\beta r}\Big|_0^\infty\right)\left(-\tfrac13\cos^3\theta\Big|_0^\pi\right)2\pi = \alpha\tfrac1\beta\tfrac23 2\pi$$

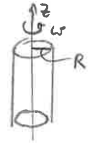
Bsp (Stromdichte → Strom)

Punktladung q fliege mit $\vec v = v\vec e_3$. Strom durch xy-Ebene $I(t) = ?$



$$\vec j = \rho\vec v = q\,\delta(\vec r - vt\vec e_3)\,v\vec e_3$$
$$I \overset{(5.76)}{=} \int_F d\vec f\cdot\vec j = \int dx\,dy\ qv\,\delta(\vec r - vt\vec e_3) = qv\,\delta(z - vt) = qv\,\delta(t)$$
$z = 0$ in xy-Ebene

Bsp (Stromdichte, Strom)



homogen geladener, ∞ langer Zylinder (Radius R, Ladungsdichte ρ) drehe sich mit Winkelgeschw. $\vec\omega = \omega\vec e_3$ um seine Symmetrieachse.

Stromdichte $\vec j = ?$ $\quad \vec j = \rho\vec v = \rho\vec\omega\times\vec r = \rho\omega r\,\vec e_\varphi\,\Theta(r-R) = \rho\omega\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix}\Theta(r-R)$

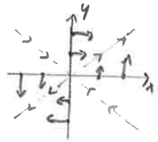
Strom pro Höhenintervall h durch rechte xz-Halbebene $I = ?$

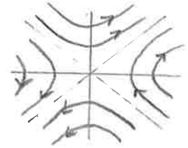
$$I = \int_F d\vec f\cdot\vec j = \int_0^R dx\int_0^h dz\ \rho\omega x = \rho\omega\left(\tfrac12 x^2\Big|_0^R\right)h = \tfrac12 h\rho\omega R^2$$

Bsp (Divergenz, Rotation)

gegeben: $\vec j = \alpha\,(y, x, 0)$. $\mathrm{div}\,\vec j = ?$ $\mathrm{rot}\,\vec j = ?$

Ladungsströmung malen:



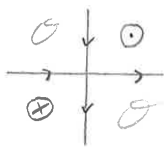


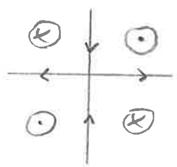
ausrechnen: $\vec\nabla\cdot\vec j = 0$
$\vec\nabla\times\vec j = \alpha\,(0, 0, 1-1) = \vec 0$

Bsp ($\vec{B}$ - Ansätze)

in zwei $\perp$, ∞ dünnen Platten herrsche homogene Stromdichte.
$\vec{B}$-Richtung = ?

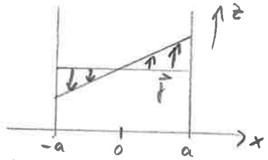
Rechte-Hand-Regel!





Bsp (Max 4 per Ansatz)

in ∞ ausgedehnter Schicht $(-a<x<a)$
fliesse Strom in $\pm z$-Richtung,
Stromdichte linear von $-j_0\vec{e}_3 \dots +j_0\vec{e}_3$ zunehmend. $\vec{B} = ?$



$\vec{j} = j_0 \frac{x}{a}\vec{e}_3\, \Theta(a^2-x^2)$

Ansatz $\vec{B} = (0, f(x), 0)$ (Max 3 ✓)

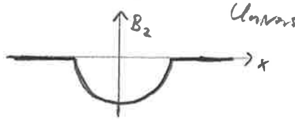
Max 4: $\vec{\nabla}\times(0,f,0) = (0,0,f') \overset{!}{=} \begin{cases} \boxed{\frac{2\pi}{c}\frac{j_0}{a}}(0,0,2x) & \text{innen} \\ 0 & \text{außen}\end{cases}$ α

$\Rightarrow f_{innen} = \alpha x^2 + C$, $f_{außen} = const = \begin{cases} D & \text{links} \\ E & \text{rechts}\end{cases}$

$\vec{B}$ stetig bei $x = \pm a$ (denn wenn B springt $(\Theta) \rightsquigarrow$ rot $\vec{B}$ hat δ
aber $\vec{j}$ hat Gems)

$\rightsquigarrow D = \alpha a^2 + C = E = 0$ (wenn keine Spule am Rand des Universums)

$\Rightarrow \vec{B} = \begin{cases} \vec{e}_2\, \alpha(x^2-a^2) & \text{innen} \\ \vec{0} & \text{außen}\end{cases}$:



Bsp (Teilchen im Magnetfeld)

löse die Bwgl für ein Teilchen im konstanten $\vec{B} = (0,0,B)$
durch Einführen der komplexen Variablen $z = v_1 + i v_2$ $(\vec{v} = \dot{\vec{r}})$:

$m\dot{\vec{v}} = \frac{q}{c}\vec{v}\times\vec{B} = \frac{qB}{c}(v_2, -v_1, 0) \iff m\dot{z} = -\frac{qB}{c} i z$

$\Rightarrow z = e^{-i\frac{qB}{mc}t}$ $\left(= \cos\frac{qB}{mc}t - i\sin\frac{qB}{mc}t \right)$

Bsp (Vektorpotential, Eichung)

homogenes, konstantes Magnetfeld $\vec{B} = (0,0,B)$. $\vec{A} = ?$

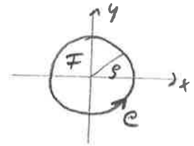
$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$, $\vec{A} = B(0,x,0)$ tut's

welches neue $\vec{A}$ erhält man durch Eichtransformation $\chi = -\frac{B}{2}xy$?

$\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\chi = B(0,x,0) - \frac{B}{2}(y,x,0) = \frac{B}{2}(-y,x,0) = \frac{B}{2}\rho\,\vec{e}_\varphi$

Bsp (integrale Max 2)

sei $\underset{t\ \text{const.}}{\vec{B} = (0,0,-\alpha t)}$ und $\vec{E} = E(\rho)\,\vec{e}_\varphi$, $\vec{E}(\rho) = ?$
$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$



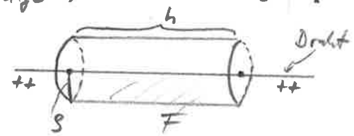
$\int$ Max 2 : $\int_C d\vec{r}\cdot\vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t\int_F d\vec{f}\cdot\vec{B} = 0$

$2\pi\rho\, E + \frac{1}{c}\partial_t\, \pi\rho^2(-\alpha t) = 0$

$\Rightarrow E = \frac{\alpha\rho}{2c}$

Bsp (integrale Max 1)

homogen geladener Draht (∞ lang + dünn, $\sigma = \frac{\text{Ladung}}{\text{Länge}}$). $|\vec{E}(\vec{r})| = E(\rho) = ?$

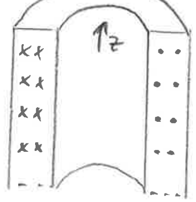


$\int$ Max 1 : $\oint_F d\vec{f}\cdot\vec{E} = 4\pi\int_V d^3r\,\rho$

$h\, 2\pi\rho\, E = 4\pi h\sigma$

$\Rightarrow E = 2\sigma/\rho$

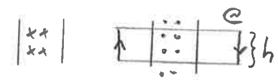
Bsp (integrale Max 4)



Magnetfeld im Innern einer Spule
(∞ lang, Strom I, Windungszahl pro Länge: N)

$\int$ Max 4 : $\oint_C d\vec{r}\cdot\vec{B} - (\sim\dot{\vec{E}})^{0} = \frac{4\pi}{c}\int_F d\vec{f}\cdot\vec{j}$

aus Symmetriegründen : $\vec{B} = (0,0,B_3)$



$h B_3 = \frac{4\pi}{c}(-h N I)$

$\Rightarrow B_3 = -4\pi N I/c$: $\downarrow\downarrow \vec{B}$ ✓ Rechte-Hand-Regel

7. Elektromagnetische Wellen / Licht

$\rightsquigarrow$ sind interessiert an Lsn der zeitabhängigen (zunächst Vakuum-) Max.

Bsp wie stellt man $\vec{E} = (0, 0, f(x - vt))$ her?

(Max 1) $\partial_z f = 0 \overset{!}{=} 4\pi\rho \Rightarrow \rho = 0$; keine Ladungsdichte nötig

(Max 2) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = (0, -f', 0) \overset{!}{=} -\frac{1}{c}\partial_t \vec{B}$

$\Rightarrow \vec{B} = (0, -\frac{c}{v} f, 0) + \vec{const}_t(\vec{r})$; $\vec{const}_t(\vec{r}) = \vec{0}$ am billigsten

(Max 3) $\partial_y B_z = 0 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow$ bereits erfüllt

(Max 4) $\vec{\nabla} \times \vec{B} = (0, 0, -\frac{c}{v} f') \overset{!}{=} \frac{1}{c}(0, 0, -vf') + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$

$\Rightarrow \vec{j} = -\frac{c^2}{4\pi v}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) f'(x - vt)\, \vec{e}_3$

Bem
- spanne Raum voller variabler Drähte; mit entsprechendem $\vec{j}$ bedienen
- $\vec{B} = \frac{c}{v}\vec{e}_1 \times \vec{E}$ fliegt mit $\vec{E}$ mit
- $v = c$: von alleine! $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$, "Vakuum"
- $v > c$? $\vec{j}^{\cdots}$
- Licht im Medium kann den zu $v \neq c$ erforderlichen Strom selbst verursachen.

Verallg.: ebene Welle $\vec{E} = \vec{E}_0 f(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$

(Max 1) erzwingt $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \vec{\nabla} f = \vec{E}_0 \cdot \vec{k} f' \overset{\text{Vakuum}}{\overset{\downarrow}{=}} 0$

$\Rightarrow \vec{E}_0 \perp \vec{k}$, Licht ist transversal

vgl. Bsp oben (dort $\vec{E}_0 \sim \vec{e}_3$, $\vec{k} \sim \vec{e}_1$)

$f\left(k\left[\frac{\vec{k}}{k}\vec{r} - \frac{\omega}{k}t\right]\right)$, $v \overset{\text{Vakuum}}{\overset{\downarrow}{=}} c \Rightarrow \omega = ck$

$[\ldots] =$ fest ist Glg. einer Ebene ($\vec{e}\vec{r} =$ Abstand)
(Ebene gleicher f-Werte, $\perp$ zu $\vec{k}$)

f muss nicht trig. Fkt sein; aber oft: periodische Sender

harmonische ebene elektromagn. Welle

$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t)$, $\omega_k = ck$ (Vakuum)

$\vec{E}_0 \perp \vec{k}$ (wg. Max 1) , $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E}$ fliegt mit

phys. Interpretation:
- Foto (Zeit fest): Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ ← Wellenzahl
- Ort fest: Periode $T = \frac{2\pi}{\omega_k} = \frac{1}{\nu}$ ← Frequenz; ω_k ← Kreisfrequenz
- $v_{ph} = c$; $v_{gr} = c$ (weil bei Überlagerungen jeder Summand mit c)
- 
- wählbar: $\vec{k}$, $\vec{E}_0$ ($\perp \vec{k}$; "Polarisation") und Phase $\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t + \varphi) = \mathrm{Re}\, e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega_k t + i\varphi}$
- superponierbar (…, zirkular, …)

Max $\Rightarrow$ Wellengleichung

Vakuum ($\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$) $\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dot{\vec{B}}/c$
$\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \dot{\vec{E}}/c$

((Bem: invar. unter $\vec{E} \to \vec{B}$, $\vec{B} \to -\vec{E}$; "Dualität"))

$\vec{B}$ eliminieren via $\vec{\nabla}\times$ (Max 2):

$$\underset{B}{\vec{\nabla}} \times (\underset{A}{\vec{\nabla}} \times \underset{C}{\vec{E}}) = B(A\cdot C) - C(A\cdot B) = \vec{\nabla}(\overset{0\ (\text{Max }1)}{\cancel{\vec{\nabla}\vec{E}}}) - \vec{\nabla}^2\vec{E} \overset{!}{=} -\frac{1}{c}\partial_t \vec{\nabla}\times\vec{B} \overset{(\text{Max }4)}{\overset{\downarrow}{=}} -\ddot{\vec{E}}/c^2$$

$\Rightarrow \boxed{\Box\vec{E} = \vec{0} , \quad \Box\vec{B} = \vec{0}}$ Wellenglg. im Vakuum

(($\Box = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta$, $\Delta = \vec{\nabla}^2$; vgl. §6.3, S. 83))

Bem.: • Info verlorengegangen: Max sorgen für $\vec{E} \perp \vec{B}$; Wellengln. nicht!

• was lernen wir aus Wellengl.?

$\rightsquigarrow$ Weil $\vec{E}(\vec{r},t)$ darstellbar ist als

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t}\, \tilde{\vec{E}}(\vec{k},\omega)$$

hat $\Box \vec{E} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega t}\left[-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2\right]\tilde{\vec{E}} \stackrel{!}{=} 0$

$\omega^2 = c^2 k^2$ zur Folge, und zwar für jeden Anteil.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{ein Feld, das frei fliegt, fliegt mit } c}$

Wdh Fourier-Transformation (vgl. z.B. Rechenmethoden)

F.T. hat 2 essentials: • man darf (wenn Fkt abfallen $\to \infty$)

• die Fkt'n $e^{i\dots}$ sind lin. unabh.

1D: $f(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \tilde{f}(k)$

$\Rightarrow \int dx\, e^{-iqx} f(x) = \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k) \underbrace{\int dx\, e^{i(k-q)x}}_{= 2\pi\delta(k-q)} = \tilde{f}(q)$

3D: $f(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x}} \tilde{f}(\vec{k})$

$\tilde{f}(\vec{k}) = \int d^3x\, e^{-i\vec{k}\vec{x}} f(\vec{x})$

$\int d^3x\, e^{i(\vec{k}-\vec{q})\vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{q})$

oft nützlich: $\vec{\nabla} e^{i\vec{k}\vec{x}} = \sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} e^{i\vec{k}\vec{x}} = \sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j\, ik^j e^{i\vec{k}\vec{x}} = i\vec{k}\, e^{i\vec{k}\vec{x}}$

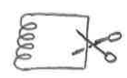
$\rightsquigarrow$ $\vec{\nabla}\overset{\times}{\cdot} \vec{f}(\vec{r}) = \overset{(\longrightarrow)}{\text{bel}}(\vec{r})$

$\Leftrightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \underbrace{\vec{\nabla}\overset{\times}{\cdot} e^{i\vec{k}\vec{r}}}_{= (\vec{\nabla} e^{i\vec{k}\vec{r}})\overset{\times}{\cdot} = e^{i\vec{k}\vec{r}}\, i\vec{k}\overset{\times}{\cdot}} \vec{f}(\vec{k}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{r}}\, \widetilde{\overset{(\longrightarrow)}{\text{bel}}}(\vec{k})$

Koeff-Vergl.: $i\vec{k}\overset{\times}{\cdot} \tilde{\vec{f}}(\vec{k}) = \overset{(\longrightarrow)}{\text{bel}}{}'(\vec{k})$

$\rightsquigarrow$ zum Merken: in FT-Gln $\vec{\nabla} \to i\vec{k}$

löse Anfangswertproblem (für Felder im Vakuum: $\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$)

$\vec{E}(\vec{r},0)$, $\vec{B}(\vec{r},0)$ gegeben (z.B. )

$\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$ gesucht

zu lösen: Max im Vakuum

F.T. nur bzgl. $\vec{r}$: $\vec{E}(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{r}} \tilde{\vec{E}}(\vec{k},t)$

$\tilde{\vec{E}}(\vec{k},0) = \int d^3r\, e^{-i\vec{k}\vec{r}} \vec{E}(\vec{r},0) \equiv \vec{e}(\vec{k})$

$\tilde{\vec{B}}(\vec{k},0) = \int d^3r\, e^{-i\vec{k}\vec{r}} \vec{B}(\vec{r},0) \equiv \vec{b}(\vec{k})$

Vakuum-Max: $i\vec{k}\cdot\tilde{\vec{E}}(\vec{k},t) = 0$, $i\vec{k}\cdot\tilde{\vec{B}}(\vec{k},t) = 0$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\vec{E}}(\vec{k},t) \\ \tilde{\vec{B}}(\vec{k},t) \end{pmatrix}^{\bullet} = \underset{\text{(Kreuzprod.)}}{c\,i\vec{k}\times} \begin{pmatrix} \tilde{\vec{B}}(\vec{k},t) \\ -\tilde{\vec{E}}(\vec{k},t) \end{pmatrix} = I\, c\,i\vec{k}\times \begin{pmatrix} \tilde{\vec{E}}(\vec{k},t) \\ \tilde{\vec{B}}(\vec{k},t) \end{pmatrix}$$

mit $I \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $I^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1}_{2\times 2}$

((generell hat $\dot{\psi} = H\psi$ die formale Lsg $\psi(t) = e^{tH}\psi(0)$))

$\Rightarrow \big(\ \big)_{(t)} = e^{t I c i\vec{k}\times}\big(\ \big)_{(t=0)}$ (Kreuzprod)

Operator; Anwendung als Potenzreihe!

$= \cos(t I c\vec{k}\times) + i\sin(t I c\vec{k}\times)$

$(ctI\vec{k}\times)^2 \underset{\tilde{\vec{E}} \text{ oder } \tilde{\vec{B}}}{\vec{V}} = (ct)^2 I^2 \underbrace{\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{V})}_{\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{V}) - \vec{k}^2\vec{V}} = (ctk)^2 \vec{V}$

$\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{V}) - \vec{k}^2\vec{V} \underset{(\text{Max }1,3)}{\longrightarrow} -\vec{k}^2\vec{V}$

$= \cos(ctk)\,\mathbb{1} + i\sin(ctk)\, I\, \frac{\vec{k}}{k}\times$

$= \begin{pmatrix} \cos() & +i\sin()\frac{\vec{k}}{k}\times \\ -\dots & \cos() \end{pmatrix}$

also z.B. $\tilde{\vec{E}}(\vec{k},t) = \cos(ctk)\,\vec{e} + i\sin(ctk)\,\frac{\vec{k}}{k}\times\vec{b}$

Rücktrafo $\Rightarrow \vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{r} - ickt}\left[\vec{e} - \frac{\vec{k}}{k}\times\vec{b}\right]$

(($\rightsquigarrow \vec{B}(\vec{r},t)$ genauso; "))

8. Retardierte Potentiale

(verzögerte, rückblickende ...)

$\rightsquigarrow$ suchen nun allg. kausale Lsg der Max zu gegebenen $\rho, \vec{j}(\vec{r},t)$

("reine", "enge" ED allg. lösbar, da Max linear in $\vec{E}, \vec{B}$)

hier: Lsg auf 4 Wegen, A, B, C, D

(A) Nachdenken:

E-Statik: • Superposition von Coulomb-Potentialen (§6.2, S.80)

$$\rightsquigarrow \phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{c}{c} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

• inhom Wellengl. (§6.3, S.86)

$$\left(\frac{1}{c^2}\cancel{\partial_t^2} - \Delta\right)\begin{pmatrix}\phi\\ \vec{A}\end{pmatrix} = \frac{4\pi}{c}\begin{pmatrix}c\rho\\ \vec{j}\end{pmatrix}$$

(Statik)

besagt, dass die Ursachen $c\rho, j_1, j_2, j_3$ gleiche Antwort haben $\rightsquigarrow \vec{A}(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{c|\vec{r}-\vec{r}'|}$

Dynamik: • bewegte Ursache; was frei fliegt, fliegt mit c (§7, S.93) von $\vec{r}'$ bis $\vec{r}$, also:

$$\boxed{\begin{pmatrix}\phi(\vec{r},t)\\ \vec{A}(\vec{r},t)\end{pmatrix} = \frac{1}{c}\int \frac{d^3r'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\begin{pmatrix}c\rho\\ \vec{j}\end{pmatrix}\left(\vec{r}', t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}$$

retardierte Potentiale (in Lorenz-Eichung)

Bem.: • die ret. Pot. gelten in Lorenz-Eichung (weil die oben benutzte inh. Wellengl. in dieser gilt)

Probe: $0 \stackrel{?}{=} \frac{1}{c}\dot{\phi} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ (L-Eichbedingung, §6.3, S.84)

$$= \frac{1}{c}\int'\left[\frac{1}{|\,|}\dot{\rho} + \frac{1}{|\,|}\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \vec{j}\cdot\underbrace{\vec{\nabla}\frac{1}{|\,|}}_{=-\vec{\nabla}'\frac{1}{|\,|}}\right] \quad \text{Trick!}$$

$$= \frac{1}{c}\int'\frac{1}{|\,|}\left[\dot{\rho} - \vec{\nabla}'\cdot\vec{j}\left(\vec{r}', t-\frac{|\,|}{c}\right) + \underbrace{\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}\left(\vec{r}', t-\frac{|\,|}{c}\right)}_{=\operatorname{div}\vec{j}}\right]$$

$= 0$ wegen Kontinuitätsgl.

• die ret. Pot. $\boxed{\cdots}$ sind eine spez. Lsg. der inhom. Wellengl. $\Box\begin{pmatrix}\phi\\ \vec{A}\end{pmatrix} = \frac{4\pi}{c}\begin{pmatrix}c\rho\\ \vec{j}\end{pmatrix}$,

also ist die allg. Lsg. gegeben durch $\boxed{\cdots}$ + (alle Lsn von $\Box\begin{pmatrix}\phi\\ \vec{A}\end{pmatrix} = 0$)

$\Box = 0$ für Wellen (s. §7) sowie lineares in $\vec{r}, t$,

d.h. nicht von $\rho, \vec{j}$ verursacht ("kausal")

• phys. Gehalt von $\boxed{\cdots}$: s. unten, §9.1 – (ca.) §9.6

(B) Greensche Funktion

Erinnerung: allg. $L\, y(x) = f(x)$

gegeben: f und $L \stackrel{!}{=}$ linearer Operator

gesucht: $y(x)$

((Bsp: inh. Wellengl., $L = \Box$, $x = \vec{r}, t$))

$\rightsquigarrow$ falls das Hilfsproblem $L\, G = \delta(x-x')$ lösbar ist mit spez Lsg $G(x,x')$, dann gilt

$$\int dx' f(x')\, L\, G(x,x') = \int dx' f(x')\,\delta(x-x') = f(x)$$

$\Rightarrow$ spez Lsg $y(x) = \int dx'\, G(x,x')\, f(x')$

((Bsp: $\Delta\phi = -4\pi\rho$, $L = \Delta$, $\Delta G = \delta(\vec{r}-\vec{r}')$,

(§6.3, S.81) $G = -\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$, $\phi = \int d\vec{r}'\left(-\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)(-4\pi\rho(\vec{r}'))$

$= \int d\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ Statik ✓))

nun: $\Box\phi = 4\pi\rho$, $L = \Box$

$$\Box\, G(\vec{r},\vec{r}'; t,t') = \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t')$$

$= G(\vec{r}-\vec{r}', t-t')$, weil $\Box$ keinen Ort / Zeit auszeichnet löse also: $\Box G(\vec r,t) = \underbrace{\delta^{(3)}(\vec r)}\,\delta(t)$ [s. auch Landau II, §62]

sehe Kugelsymmetrie ⇒ nur $|\vec r|$-Abhängigkeit

in Kugelkoord., $\Delta = \frac{1}{r}\partial_r^2 r + \ldots \partial_\theta, \partial_\varphi \ldots$

⇝ Ansatz: $G(r,t) = \frac{1}{r} f(r,t)$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{1}{r}\ddot f - \underbrace{(\Delta \tfrac{1}{r})}_{-4\pi\delta^{(3)}(\vec r)} f - 2\underbrace{(\vec\nabla \tfrac{1}{r})}_{-\frac{\vec r}{r^3}}\cdot\underbrace{(\vec\nabla f)}_{\frac{\vec r}{r} f'} - \frac{1}{r}\underbrace{\Delta f}_{f'' + \frac{2}{r}f'} = \delta^{(3)}(\vec r)\,\delta(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r}\left(\frac{1}{c^2}\ddot f - f''\right) + 4\pi f(0,t)\,\delta^{(3)}(\vec r) = \delta^{(3)}(\vec r)\,\delta(t)$$

für $r \neq 0$: $\frac{1}{c^2}\ddot f = f''$ ⇒ $f = f(r \mp ct)$ (schwingende Saite)

⇒ bei $\vec r = \vec 0$: $4\pi f(\mp ct) = \delta(t) = c\,\delta(ct)$

⇝ $f = \frac{c}{4\pi}\delta(r \mp ct)$

$$\Rightarrow \boxed{G(\vec r,t) = \frac{\delta(t - r/c)}{4\pi r}} \quad \text{löst} \quad \Box G(\vec r,t) = \delta^{(3)}(\vec r)\,\delta(t)$$

mit auslaufender Kugelwelle: retardierte Greensche Fkt

(($G = \frac{\delta(t + r/c)}{4\pi r}$ ist bei $t<0$ einlaufende Kugelwelle:

avancierte Greensche Fkt; $\Box(G\text{-Diff.}) = 0$))

⇝ mit G können wir nun sofort die Lsg von $\Box\phi = 4\pi\rho$ angeben:

$$\phi(\vec r,t) = \int d^3r' \int dt' \,\frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\vec r - \vec r'|}{c}\right)}{4\pi|\vec r - \vec r'|}\,4\pi\rho(\vec r',t')$$

$$= \frac{1}{c}\int \frac{d^3r'}{|\vec r - \vec r'|}\,c\,\rho\left(\vec r', t - \frac{|\vec r - \vec r'|}{c}\right)$$

analog für $\Box\vec A = \frac{4\pi}{c}\vec j$

} ≡ retardierte Potentiale von S. 95 ✓

(C) $\Box\phi = 4\pi\rho$ via F.T.

Vorsichtsmaßnahme: $\Box \to \bar\Box \equiv \frac{1}{c^2}\partial_t^2 + 2\gamma\frac{1}{c}\partial_t - \Delta$

mit $\gamma = 0^+$ (infinit. Reibung, "Watte im Univ.")

inh. Wellengl.: $\left[-\frac{\omega^2}{c^2} - i\omega\frac{2\gamma}{c} + k^2\right]\tilde\phi(\vec k,\omega) = 4\pi\tilde\rho(\vec k,\omega)$

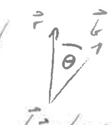
$$\text{Lsg:}\quad \tilde\phi(\vec k,\omega) = \frac{4\pi\tilde\rho(\vec k,\omega)}{[\ldots]} = \frac{4\pi\tilde\rho(\vec k,\omega)}{\left[\left(k - \frac{\omega}{c} - i\gamma\right)\left(k + \frac{\omega}{c} + i\gamma\right) - \cancel{\gamma^2}\right]}$$

(weil infinit.²)

Rücktrafo

$$\Rightarrow \phi(\vec r,t) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int\frac{d\omega}{2\pi}\,e^{i\vec k\vec r - i\omega t}\,\frac{4\pi}{[\ldots]}\int d^3r'\int dt'\,e^{-i\vec k\vec r' + i\omega t'}\rho(\vec r',t')$$

$$= \int d^3r'\int dt' \underbrace{\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int\frac{d\omega}{2\pi}\,e^{i\vec k(\vec r - \vec r') - i\omega(t-t')}\frac{1}{[\ldots]}}_{\equiv G(\vec r - \vec r',\, t - t')} 4\pi\rho(\vec r',t')$$



$\vec k\vec r = kr\cos\theta \equiv -kru$

berechne
$$G(\vec r,t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k\,e^{i\vec k\vec r}\int d\omega\,e^{-i\omega t}\frac{1}{\left(k - \frac{\omega}{c} - i\gamma\right)\left(k + \frac{\omega}{c} + i\gamma\right)}$$

$\int d^3k\,e^{i\vec k\vec r} = 2\pi\int_0^\infty dk\,k^2\int_{-1}^{1}du\,e^{-ikru} = 2\pi\int_0^\infty dk\,k^2\,\frac{2\sin(kr)}{kr}$, $\int_0^\infty dk = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dk$ (erlaubt, da Integrand gerade in k).

$\frac{1}{(\ldots)(\ldots)} = \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{(-)} + \frac{1}{(+)}\right)$ (Partialbruchzerlegung) — jetzt hier $k \to -k$

$$= \frac{1}{r}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\omega\,e^{-i\omega t}\int dk\,\sin(kr)\,\frac{1}{k - \frac{\omega}{c} - i\gamma}$$

((oder gleich per Mathematica))

$k \to k + \omega/c$

$$\int dk\,\sin\left(kr + \tfrac{\omega}{c}r\right)\frac{1}{k - i\gamma}$$

$$= \int dk\left[\sin(kr)\cos\left(\tfrac{\omega}{c}r\right) + \cos(kr)\sin\left(\tfrac{\omega}{c}r\right)\right]\left(\frac{k}{k^2+\gamma^2} + \frac{i\gamma}{k^2+\gamma^2}\right)$$

$$= \cos\left(\tfrac{\omega}{c}r\right)\int dk\,\frac{k\sin(kr)}{k^2+\gamma^2} + i\sin\left(\tfrac{\omega}{c}r\right)\int dk\,\cos(kr)\,\underbrace{\frac{\gamma}{k^2+\gamma^2}}_{\gamma\to 0:\ \to\pi\delta(k)}$$

$$= \left\{\cos\left(\tfrac{\omega}{c}r\right) + i\sin\left(\tfrac{\omega}{c}r\right)\right\}\pi e^{-\gamma r} \overset{\gamma\to 0}{=} \pi e^{i\omega\frac{r}{c}}$$

$$= \frac{\pi}{r(2\pi)^3}\underbrace{\int d\omega\,e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})}}_{= 2\pi\delta(t - \frac{r}{c})} = \frac{\delta(t - \frac{r}{c})}{4\pi r}, \quad \text{weiter wie (B)}$$

Bem. zu (B), (C)

Wir hätten zu $\Box\phi = 4\pi\rho$ auch so denken können:

$4\pi\rho$ = Ursache, ϕ = Antwort

doppelte Ursache $\Rightarrow$ doppelte Antwort : Zusammenhang ist linear

der allg. lineare Zshg ((vgl. $\vec{a} = \text{Matrix}\cdot\vec{u}$, $a_j = \text{Matrix}_{jk}\, \underbrace{u_k}_{\Sigma}$))

hat die Form $\phi(\vec{r},t) = \int d^3\vec{r}\,' \int dt'\, G(\vec{r},t;\vec{r}\,',t')\, 4\pi\rho(\vec{r}\,',t')$

der Zshg ist transl.-invariant: $\overset{\parallel}{G}(\vec{r}-\vec{r}\,', t-t')$

und nun: (B) G-Eigenschaften ?

$$\Box\phi = \int' \underbrace{\Box G}_{=\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta(t-t')} 4\pi\rho(\vec{r}\,',t') = 4\pi\rho(\vec{r},t)$$

(Greens gefunden !)

(C) F.T. des allg. lin. Zshg's :

$$\tilde{\phi} = \tilde{G}\cdot 4\pi\tilde{\rho} \,, \quad \text{vgl. mit } \widetilde{\text{Wellengl}} \quad \tilde{\phi} = \frac{4\pi\tilde{\rho}}{[\ldots]}$$

$$\Rightarrow \tilde{G} = \frac{1}{[\cdot\cdot]} \,, \quad G = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t}\, \frac{1}{[\cdot\cdot]} \,, \text{ s.o.}$$

Faltungsintegrale faktorisieren im Fourier-Raum!

Faltungsintegral: $\int dy\, K(x-y)\, f(y) = g(x)$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\int dy}_{\to 2\pi\delta(k-q)} \int \frac{dq}{2\pi}\, e^{iq(x-y)}\, \tilde{K}(q) \int \frac{dk}{2\pi}\, e^{iky}\, \tilde{f}(k) = \int \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx}\, \tilde{g}(k)$$

$$\Rightarrow \tilde{K}(k)\cdot\tilde{f}(k) = \tilde{g}(k) \qquad \text{qed}$$

(D) $\widetilde{\text{Max}}$ via F.T.

Vorsichtsmaßnahme : $\vec{j} \to \vec{j} + \sigma\vec{E}$

mit $\sigma = 0^+$ ("infinit. Leitfähigkeit des Univ.")

$\widetilde{\text{Max}}$:

1 2	$i\vec{k}\cdot\tilde{\vec{E}} = 4\pi\tilde{\rho}$	$i\vec{k}\times\tilde{\vec{E}} - \frac{i\omega}{c}\tilde{\vec{B}} = \vec{0}$
3 4	$i\vec{k}\cdot\tilde{\vec{B}} = 0$	$i\vec{k}\times\tilde{\vec{B}} + \frac{i\omega}{c}\tilde{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c}(\tilde{\vec{j}} + \sigma\tilde{\vec{E}})$

Lsg: ((analog zu "$\vec{B}$ eliminieren" für Max $\Rightarrow$ Wellengl, vgl §7, S. 92))

- $i\vec{k}\times(\widetilde{\text{Max}2})$; bac-cab ; $(\widetilde{\text{Max}1})$ ausnutzen ; $(\widetilde{\text{Max}4})$ einsetzen :

$$i\vec{k}\times(i\vec{k}\times\tilde{\vec{E}}) = i\vec{k}(i\vec{k}\cdot\tilde{\vec{E}}) + k^2\tilde{\vec{E}} = i\vec{k}\,4\pi\tilde{\rho} + k^2\tilde{\vec{E}} =$$

$$= \frac{i\omega}{c}\, i\vec{k}\times\tilde{\vec{B}} = \frac{i\omega}{c}\left(-\frac{i\omega}{c}\right)\tilde{\vec{E}} + \frac{i\omega}{c}\frac{4\pi}{c}(\tilde{\vec{j}} + \sigma\tilde{\vec{E}})$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\vec{E}}\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{i\omega}{c}\frac{4\pi}{c}\sigma\right] = -i\vec{k}\,4\pi\tilde{\rho} + \frac{i\omega}{c}\frac{4\pi}{c}\tilde{\vec{j}}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\vec{E}} = -i\vec{k}\underbrace{\boxed{\frac{4\pi\tilde{\rho}}{[\ldots]}}}_{=\tilde{\phi}} + \frac{i\omega}{c}\underbrace{\boxed{\frac{4\pi\tilde{\vec{j}}}{c[\ldots]}}}_{=\tilde{\vec{A}}}$$

(vgl. [...] aus (C), S.98, mit $\frac{2\gamma}{c} \to \frac{4\pi\sigma}{c^2}$)

- analog : $i\vec{k}\times(\widetilde{\text{Max}4})$; bac-cab ; $(\widetilde{\text{Max}3})$ ausnutzen ; $(\widetilde{\text{Max}2})$ einsetzen:

$$i\vec{k}\times(i\vec{k}\times\tilde{\vec{B}}) = i\vec{k}\,\overset{\text{Max}3}{\cancel{(i\vec{k}\cdot\tilde{\vec{B}})}} + k^2\tilde{\vec{B}} = -\frac{i\omega}{c}\, i\vec{k}\times\tilde{\vec{E}} + \frac{4\pi}{c}(i\vec{k}\times\tilde{\vec{j}} + \sigma\, i\vec{k}\times\tilde{\vec{E}}) =$$

$$= \frac{4\pi}{c}\, i\vec{k}\times\tilde{\vec{j}} + \left(-\frac{i\omega}{c} + \frac{4\pi}{c}\sigma\right)\frac{i\omega}{c}\tilde{\vec{B}}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\vec{B}} = i\vec{k}\times\underbrace{\boxed{\frac{4\pi\tilde{\vec{j}}}{c[\ldots]}}}_{=\tilde{\vec{A}}}$$

Rücktrafo $\Rightarrow$ also $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}$, $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

brauchen noch Rücktrafo von $\tilde{\phi}, \tilde{\vec{A}} \to \phi, \vec{A}$,

siehe Weg (C) mit $\frac{2\gamma}{c} = \frac{4\pi\sigma}{c^2}$ $\Rightarrow$ ret. Pot. ✓

9. Wichtige Anwendungen

... der (retardierten) Potentiale aus §8

→ weiterhin: "enge" ED ; $\rho(\vec r,t)$ und $\vec j(\vec r,t)$ vorgegeben

9.1 Statik, Multipole

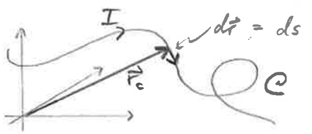
Statik: gegeben $\rho, \vec j$ ohne Zeitargument

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \phi(\vec r) \\ \vec A(\vec r) \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \int \frac{d^3 \vec r\,'}{|\vec r - \vec r\,'|} \begin{pmatrix} c\rho(\vec r\,') \\ \vec j(\vec r\,') \end{pmatrix}$$

Bem.:
- $\int d^3\vec r\,'$ über ganzen Raum
- Anordnungen, die bis nach ∞ reichen, gibt es nicht; wohl aber $\vec r$'s, von denen aus die Ränder des Objekts weit weg erscheinen.
- $|\vec r - \vec r\,'| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2} = \sqrt{(\vec\rho - \vec\rho\,')^2 + (z-z')^2} = \sqrt{(\vec r - \vec r\,')^2} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta}$

  (wenn man $\vec r\,'$-Kugelkoord. um $\vec r$ wählt, dann ist θ Kugelkoord.)
- $\vec r\,' \to \vec r\,' + \vec r$ oder $z' \to z' + z$ im Integrand erlaubt (wegen ∞ Grenzen)

häufigste Magnetostatik-Pathologie: ∞ dünner Draht



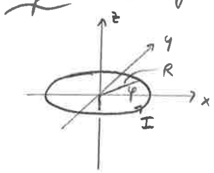
$$\vec A(\vec r) = \frac{1}{c} \int \frac{d^2 \vec r_\perp{}'\, ds'\, \vec e_c}{|\vec r - \vec r\,'|}\, I\, \delta^{(2)}([\vec r\,' - \vec r_c]_\perp) = \frac{1}{c} \int \frac{ds'\, \vec e_c}{|\vec r - \vec r\,'|}\, I = \frac{I}{c} \int_{\mathcal{C}} d\vec r\,' \frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

$$\Rightarrow \vec B(\vec r) = \vec\nabla \times \vec A = \frac{I}{c} \int_{\mathcal{C}} \left(\vec\nabla \frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|} \right) \times d\vec r\,' = \frac{I}{c} \int_{\mathcal{C}} d\vec r\,' \times \frac{\vec r - \vec r\,'}{|\vec r - \vec r\,'|^3}$$

$$\left(\vec\nabla \frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|} = - \frac{\vec r - \vec r\,'}{|\quad|^3} \right)$$

Biot-Savart Formel

Bsp (Ringstrom durch ∞ dünnen Draht)



wie groß ist $B(\vec r)$ auf z-Achse?

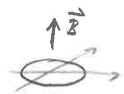
in Biot-Savart, $\int_{\mathcal{C}} d\vec r\,' = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{d\vec r\,'}{d\varphi}$,

mit $\vec r\,' = R \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d\vec r\,'}{d\varphi} = \vec e_\varphi = R \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$;

gefragt ist nach $\vec r = z\vec e_3 \Rightarrow \vec r - \vec r\,' = \begin{pmatrix} -R\cos\varphi \\ -R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$, $|\vec r - \vec r\,'| = \sqrt{R^2 + z^2}$

es gilt $\frac{d\vec r\,'}{d\varphi} \times (\vec r - \vec r\,') = \det \begin{pmatrix} \vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3 \\ -R\sin\varphi & R\cos\varphi & 0 \\ -R\cos\varphi & -R\sin\varphi & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} zR\cos\varphi \\ zR\sin\varphi \\ R^2 \underbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{=1} \end{pmatrix}$

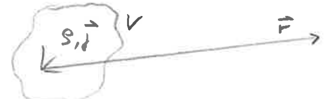
$$\Rightarrow \vec B(z\vec e_3) = \frac{I}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} zR\cos\varphi \\ zR\sin\varphi \\ R^2 \end{pmatrix} = \frac{I}{c} \frac{2\pi R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



statische Momente

→ oft ist Ladungs-/Strom-Dichte "lokalisiert";

wie sehen die Potentiale von "weit weg" aus?



, $r \gg$ alle $|\vec r\,'|$

⇒ kann allg. Potentiale $\begin{pmatrix} \phi \\ \vec A \end{pmatrix}(\vec r) = \int_V \frac{d^3 \vec r\,'}{|\vec r - \vec r\,'|} \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec j \end{pmatrix}(\vec r\,')$

durch Taylor-Entwicklung in $\vec r\,'$ vereinfachen

- zur Erinnerung: $f(x+\varepsilon) = f(x) + \varepsilon f'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!} f''(x) + \frac{\varepsilon^3}{3!} f'''(x) + \dots = e^{\varepsilon \partial_x} \cdot f(x)$ Translationsoperator

- $$\frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|} = e^{-\vec r\,' \cdot \vec\nabla} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \vec r\,' \cdot \vec\nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{2} (\vec r\,' \cdot \vec\nabla)(\vec r\,' \cdot \vec\nabla) \frac{1}{r} - \dots$$

  $$\vec r\,' \cdot \vec\nabla \frac{1}{r} = x_i' \partial_{x_i} \left((x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 \right)^{-1/2} = - x_i' \frac{x_i}{r^3} = - \frac{\vec r\,' \cdot \vec r}{r^3}$$

  und $\partial_j \partial_k \frac{1}{r} = \partial_j \left(- \frac{x_k}{r^3} \right) = - \frac{\delta_{jk}}{r^3} + 3 \frac{x_j x_k}{r^5}$

  $$= \frac{1}{r} + \frac{\vec r\,' \cdot \vec r}{r^3} + \frac{1}{2r^5} \left(3 (\vec r\,' \cdot \vec r)^2 - r^2 r'^2 \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4} \right)$$

lese nun die $\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}$ - Entwicklung als Summe über Produkte $\Rightarrow$ alles $\vec r$-Abhängige vors Integral (in $\phi = \int' \dots$ etc).

$$\frac{1}{|\vec r-\vec r'|} = \frac{1}{r} + \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i}{r^3} x_i' + \sum_{j,k}^{3} \frac{1}{2r^5}\left(x_j x_k - \tfrac{1}{3} r^2 \delta_{jk}\right) 3 x_j' x_k' + \mathcal{O}(1/r^4)$$

$$= \frac{1}{r} + \sum_i \frac{x_i}{r^3} x_i' + \sum_{j,k} \frac{1}{2r^5}\left(x_j x_k - \tfrac{1}{3} r^2 \delta_{jk}\right)\left(3x_j' x_k' - r'^2 \delta_{jk}\right) + \mathcal{O}(1/r^4)$$

erlaubt, da 0 unter $\sum_{jk}$ ($\delta_{jj} = 3$)

- das (statische) Skalarpotential ist dann

$$\phi(\vec r) = \frac{1}{c}\int_V \frac{d^3\vec r'\, c\,\varrho(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}$$

$$= \frac{1}{r}\underbrace{\int_V d^3\vec r'\,\varrho(\vec r')}_{= Q,\ \text{Gesamtladung}} + \frac{\vec r}{r^3}\cdot\underbrace{\int_V d^3\vec r'\,\vec r'\varrho(\vec r')}_{= \vec p,\ \text{(el.) Dipolmoment}} + \quad \text{(ähnlich Schwerpkt.)}$$

$$+ \frac{1}{2r^5}\sum_{j,k}\left(x_j x_k - \tfrac{1}{3} r^2 \delta_{jk}\right)\underbrace{\int d^3\vec r'\left(3x_j' x_k' - r'^2 \delta_{jk}\right)\varrho(\vec r')}_{= Q_{jk},\ \text{Quadrupoltensor}} + \mathcal{O}(1/r^4)$$

$= Q_{jk}$, Quadrupoltensor (ähnlich Trägheitstensor)

könnte man weglassen (da $Sp(Q) = 0$)

Bem:
- $\sum_{j,k} x_j x_k Q_{jk} = \vec r \cdot Q \vec r$
- Q_{jk} - Eigenschaften: spurlos $\sum_{i=1}^{3} Q_{ii} = 0$

  symmetrisch $Q_{ij} = Q_{ji}$ ($Q = Q^T$)

  $\Rightarrow \exists$ Hauptachsen, Eigenwerte $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$

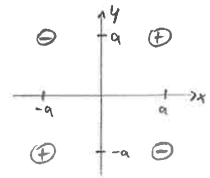
  falls Symm.-Achse: $Q_1 = Q_2 = -\frac{1}{2} Q_3$

Bsp (geladene Kugeloberfläche) $\varrho(\vec r) \equiv \delta(r-R)\,\sigma_0 \sin^2\theta$ (σ_0 const.)

$\Rightarrow Q = \sigma_0\, 2\pi\, R^2 \underbrace{\int_{-1}^{1} du\,(1-u^2)}_{= 4/3}$ (Kugelkoord., $u = -\cos\theta$)

$\Rightarrow \vec p = \vec 0$ wegen $\varrho(\vec r) = \varrho(-\vec r)$

Bsp (4 Punktladungen q)



$$\varrho(\vec r') = q\left[\delta\left(\vec r' - \begin{pmatrix}0\\a\\0\end{pmatrix}\right) - \delta\left(\vec r' - \begin{pmatrix}-a\\a\\0\end{pmatrix}\right) + \delta\left(\vec r' + \begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}\right) - \delta\left(\vec r' + \begin{pmatrix}-a\\a\\0\end{pmatrix}\right)\right]$$

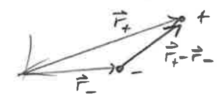
$Q = q - q + q - q = 0$

$\vec p = \vec 0$ wegen $\varrho(\vec r') = \varrho(-\vec r')$

$$(Q_{ij}) = q a^2 \Big[\left(3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}_j \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}_k - \cancel{2\delta_{jk}}\right) - \left(3\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}_j\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}_k - \cancel{2\delta_{jk}}\right) + \left(3\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}_j\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}_k - \cancel{2\delta_{jk}}\right) - \left(3\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}_j\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}_k - \cancel{2\delta_{jk}}\right)\Big]$$

$$= 12\, q a^2 \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Bsp (Dipol) q bei $\vec r_+$, $-q$ bei $\vec r_-$



$\varrho(\vec r') = q\left[\delta(\vec r' - \vec r_+) - \delta(\vec r' - \vec r_-)\right]$

$Q = q - q = 0$

$\vec p = q(\vec r_+ - \vec r_-)$

((allg.: bei $Q = 0$ sieht man aus großer Entfernung nur noch das ϕ eines Dipols – egal wie wild die Ladungsvert.))

Bsp (kugelsymm. Ladungsdichte) $\varrho(\vec r') = \varrho(|\vec r'|)$

$Q = \int \varrho \neq 0$

$$\vec p = \int_V d^3\vec r'\, \vec r'\, \varrho(|\vec r'|) = \int_V d^3\vec r'\, \tfrac{1}{2}\left[\vec r'\varrho(|\vec r'|) + \underbrace{\vec r'\varrho(|\vec r'|)}_{\text{Subst. } \vec r' \to -\vec r'}\right] = \vec 0$$

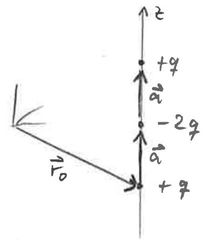
$$Q_{j\neq k} = \int_V d^3\vec r'\, 3x_j' x_k'\, \varrho(|\vec r'|) = \int_V d^3\vec r'\, x_j'\, \tfrac{1}{2}\left[x_k'\varrho(|\vec r'|) + \underbrace{x_k'\varrho(|\vec r'|)}_{\text{Subst. } x_k' \to -x_k'}\right] = 0$$

$\Rightarrow Q_{jk}$ ist diagonal.

aus Symmetriegründen gilt $Q_{11} = Q_{22} = Q_{33}$

aber Spur $= Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{ij} = 0 \quad (!)$

Bsp (3 Punktladungen auf Achse ≡ z-Achse)



$Q = q - 2q + q = 0$

$\vec{p} = q\,[\,\vec{r}_0 - 2(\vec{r}_0+\vec{a}) + (\vec{r}_0+2\vec{a})\,] = \vec{0}$

aus Symmetriegründen Q_{jk} diagonal

sowie $Q_{11} = Q_{22}$

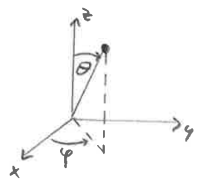
wegen Spur $Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{11} = Q_{22} = -\frac{1}{2} Q_{33}$

$$Q_{33} = \int d^3r' \left(3z^2 - |\vec{r}'|^2\right) \rho(\vec{r}') = \int d^3r' \left(2z^2 - \underbrace{x^2 - y^2}_{\text{proportional zu } q-2q+q=0}\right) \rho(\vec{r}')$$

$$= 2q\left(z_0^2 - 2(z_0+a)^2 + (z_0+2a)^2\right) = 4qa^2$$

→ oben (S. 103) hatten wir kartesische Multipolmomente definiert; man kann auch die Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten durchführen, vgl. z.B. [Jackson, §3, s. Formel (3.70)].

Hier: Hauptergebnisse (ohne Herleitung)



Kugelkoord., Winkel $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$, $\ell = 0,1,2,\dots$, $m = -\ell,\dots,\ell$

bilden eine vollständige Menge von orthonormierten Funktionen

d.h. $\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \; Y^*_{\ell m}(\theta,\varphi)\, Y_{\ell' m'}(\theta,\varphi) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$

d.h. jede (differenzierbare) Fkt $f(\theta,\varphi)$ als $f(\theta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} \boxed{a_{\ell m}}\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ darstellbar.

$a_{\ell m} = \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \; Y^*_{\ell m}(\theta,\varphi)\, f(\theta,\varphi)$

(Mathematica: SphericalHarmonicY[l,m,θ,φ])

Beispiele

$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$, $\quad Y_{1\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \, e^{\pm i\varphi}$

$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$, ...

z.B. mit Mathematica kann man die $Y_{\ell m}$ erkunden:

((spielen auch wichtige Rolle in QM: z.B. H-Atom))

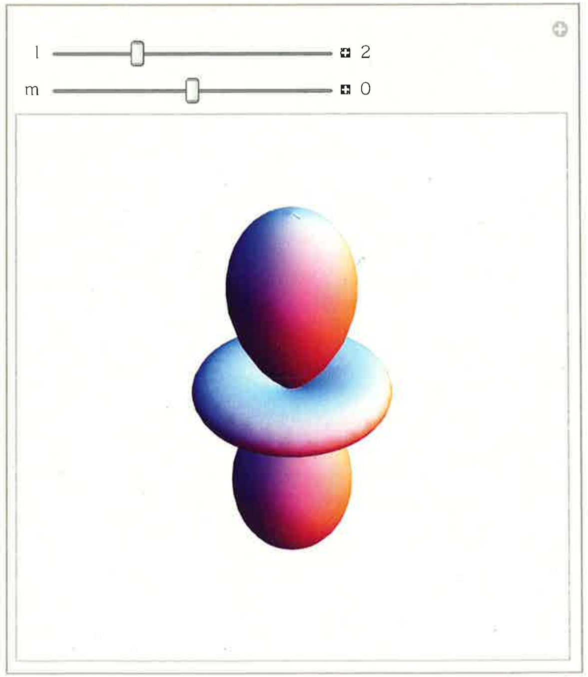
■ **Kugelflaechenfunktionen Y_lm - Visualisierung**

```
In[1]:= (*basic Mathematica command for Y_lm(theta,phi)*)
        SphericalHarmonicY[2, 0, th, phi]
```

Out[1]= $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\left(-1+3\,\mathrm{Cos}[th]^2\right)$ $= Y_{20}(th, phi)$

```
In[6]:= (*Visualisierung*)
        Manipulate[SphericalPlot3D[Abs[SphericalHarmonicY[l, m, th, phi]], {th, 0, Pi},
          {phi, 0, 2 Pi}, Mesh → False, Axes → False, SphericalRegion → True, Boxed → False],
         {{l, 2, "l"}, 0, 7, 1, Appearance → "Labeled"},
         {{m, 0, "m"}, -1, 1, 1, Appearance → "Labeled"}]
```

Out[6]=



insbesondere $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{|\vec{r}'|^{\ell}}{|\vec{r}|^{\ell+1}} Y^*_{\ell m}(\theta',\varphi')\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$

"perfekte Separation", [Jackson (3.70)]

→ Multipolentwicklung (für $|\vec{r}| \gg \max_{\vec{x}' \in V} |\vec{r}'|$)

$\phi(\vec{r}) = \int_V \frac{d^3r' \,\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, q_{\ell m} \frac{Y_{\ell m}(\theta,\varphi)}{r^{\ell+1}}$

mit $q_{\ell m} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \int d^3r' \, |\vec{r}'|^{\ell}\, Y^*_{\ell m}(\theta',\varphi')\, \rho(\vec{r}')$

- betrachte nun das (statische) Vektorpotential

  ((Magnetostatik ; $\varrho = 0$, $\vec{j}$ im Endlichen (z.B. in V), $r = |\vec{r}| \to \infty$))

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{d^3\vec{r}'\ \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ \vec{r}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{cr}\underbrace{\int d^3\vec{r}'\ \vec{j}(\vec{r}')}_{①} + \sum_{j=1}^{3} \frac{x_j}{cr^3}\underbrace{\int d^3\vec{r}'\ x_j'\ \vec{j}(\vec{r}')}_{②} + \mathcal{O}(1/r^3)$$

① nach denken: $\cancel{\dot{\varrho}} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$ $\rightsquigarrow$ $\vec{j}$ hat keine Quellen
(Kontinuitätsgl.) Stromlinien geschlossen

$\Rightarrow$ Mittelwert $= 0$

per Rechnung: wähle V groß genug, so daß $\vec{j}(\vec{r})\big|_{\vec{r}\in\partial V} = \vec{0}$

$$\Rightarrow 0 = \int_{\partial V} d\vec{f}\cdot\vec{j}(\vec{r})\ f(\vec{r}) \qquad \text{für } \underline{\text{beliebiges}}\ f(\vec{r})$$

$$(\text{Sv Gauss}) \rightsquigarrow = \int_V d^3\vec{r}\ \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{j}(\vec{r})f(\vec{r})\right)$$

$$= \int_V d^3\vec{r}\left\{\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{j})}_{=0,\ \text{Konti. s.o.}} f + \vec{j}\cdot\vec{\nabla}f\right\} = \int_V d^3\vec{r}\ \vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{\nabla}f(\vec{r})$$

wähle jetzt z.B. $f(\vec{r}) = x_1$ $\Rightarrow$ $0 = \int_V d^3\vec{r}\ \vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{e}_1 = \int_V d^3\vec{r}\ j_1(\vec{r})$

(analog für $f = x_2$, $f = x_3$)

$\Rightarrow$ insgesamt also $① = \int_V d^3\vec{r}\ \vec{j}(\vec{r}) = 0$

"es gibt keine magnetischen Monopole"

② wähle nun $f(\vec{r}) = x_k x_j$

$$\Rightarrow \vec{j}\cdot\vec{\nabla}f(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{3} j_i\,\partial_i\,x_k x_j = \sum_i j_i\left(\delta_{ik}x_j + \delta_{ij}x_k\right) = j_k x_j + j_j x_k$$

$$\Rightarrow ② = \int_V d^3\vec{r}\ x_j\,\vec{j}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^{3}\vec{e}_k\int_V d^3\vec{r}\ \underbrace{j_k x_j}_{=\frac{1}{2}\{j_k x_j + \underbrace{\vec{j}\cdot\vec{\nabla}f}_{\to 0} - j_j x_k\}}$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\frac{\vec{e}_k}{2}\int_V d^3\vec{r}\left\{j_k(\vec{r})x_j - j_j(\vec{r})x_k\right\}$$

es gilt $\{\ldots\} = \left(\delta_{km}\delta_{jn} - \delta_{jm}\delta_{kn}\right) j_m x_n \qquad \left(\sum_{m,n=1}^{3}\right)$

$$= \varepsilon^{ikj}\varepsilon^{imn}\, j_m x_n$$

$$= \varepsilon^{ikj}\left(\vec{j}\times\vec{r}\right)_i = \varepsilon^{kij}\left(\vec{r}\times\vec{j}\right)_i$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{cr}\cdot\vec{0} + \sum_{j=1}^{3}\frac{x_j}{cr^3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\vec{e}_k}{2}\int_V d^3\vec{r}'\sum_{i=1}^{3}\varepsilon^{kij}\left(\vec{r}'\times\vec{j}(\vec{r}')\right)_i + \ldots$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{1}{2c}\int_V d^3\vec{r}'\left(\vec{r}'\times\vec{j}(\vec{r}')\right)}}_{=\vec{m}\ \ \text{magnetisches Dipolmoment}} \times \frac{\vec{r}}{r^3} + \mathcal{O}(1/r^3)$$

$\Rightarrow$ s. auch $\underline{\underline{Ü48}}$

daraus folgt

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^{3}\vec{e}_k\,\varepsilon^{kij}\,\partial_i \underbrace{A_j}_{=\varepsilon^{jln}\, m_l \frac{x_n}{r^3}}$$

$$= \sum_k \vec{e}_k\left(\delta_{kl}\delta_{in} - \delta_{kn}\delta_{il}\right) m_l\ \underbrace{\partial_i\frac{x_n}{r^3}}_{=\frac{\delta_{in}}{r^3} - x_n\frac{3x_i}{r^5}}$$

$$= \sum_k \vec{e}_k\left(\cancel{\frac{3}{r^3}m_k} - \frac{1}{r^3}m_k - \cancel{m_k\frac{3r^2}{r^5}} + \frac{3}{r^5}x_k\,\vec{m}\cdot\vec{r}\right)$$

$$= \frac{1}{r^5}\left(3\vec{r}(\vec{m}\cdot\vec{r}) - r^2\vec{m}\right)$$

Bem.: vgl. dies mit elektrischem Dipolfeld:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi - \underbrace{\cancel{\frac{\dot{\vec{A}}}{c}}}_{\text{Statik}}$$

$$= -\vec{\nabla}\left(\frac{Q}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} + \frac{\vec{r}\,\overleftrightarrow{Q}\,\vec{r}}{2r^5} + \ldots\right)$$

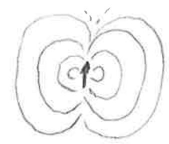
el. Dipolmoment

$$\ni -\vec{\nabla}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} = -\partial_i\frac{x_j p_j}{r^3}\vec{e}_i = \left(-\frac{\delta_{ij}p_j}{r^3} + \frac{3}{\cancel{2}}\frac{x_j p_j\,\cancel{2}x_i}{r^5}\right)\vec{e}_i$$

$$= \frac{1}{r^5}\left(3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r}) - r^2\vec{p}\right)$$

Bsp. Dipol-Felder zu $\vec{p} = p\vec{e}_3$, $\vec{m} = m\vec{e}_3$: (z.B. um z-Achse rotierende homogen (Oberfl.-) gel. Kugel)

$$\begin{pmatrix}\vec{E}(\vec{r}) \\ B(\vec{r})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \\ \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p \\ m\end{pmatrix}\frac{3z\vec{r} - r^2\vec{e}_3}{r^5}$$



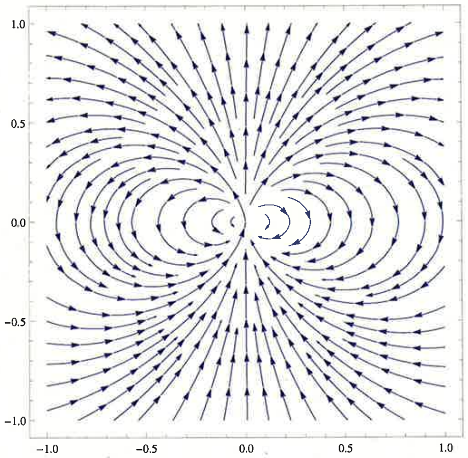
z.B. mit Mathematica:

Visualisierung der Dipolfelder von S. 108 unten

- **Dipol-Felder**

In[1]:=
```
(*Vorl Seite 108 unten: Dipol auf z-Achse, Plot zB in x-z Ebene (y=0)*)
StreamPlot[{3 z x, 3 z z - (x^2 + z^2)} / (x^2 + z^2) ^ (5 / 2), {x, -1, 1}, {z, -1, 1}]
```

Out[1]=



Kräfte auf Dipole

$\rightarrow$ Lorentzkraft (vgl. §6, S. 74)

$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{1}{c} q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\rightarrow \int \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \int \vec{j} \times \vec{B}$$

9.2 Liénard-Wiechert Potentiale

$\rightsquigarrow$ "erster Blick" auf $t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$ in ret. Pot.

$\rightsquigarrow$ typische Anwendung: eine / mehrere bewegte Punktladungen

$\Rightarrow$ z.B. "Synchrotronstrahlung" (s. unten, §9.4)

(ultrarelativistische) e^- im $\vec{B}$-Feld

z.B. in Beschleunigern / Plasmen / Astrophysik

emittierte Strahlung ist wichtige Lichtquelle

für z.B. Festkörperphysik, Biologie

betrachte eine Punktladung (q) auf Bahn $\vec{r}_0(t)$

$\Rightarrow$ Ladungsdichte Stromdichte (s. §6.1, S. 76):

$$\begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} = c q\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\beta}(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{\beta} \equiv \frac{\vec{v}(t)}{c} = \frac{\dot{\vec{r}}_0(t)}{c}$$

$\Rightarrow$ retardierte Potentiale (s. §8, S. 95):

$$\begin{pmatrix} \phi(\vec{r},t) \\ \vec{A}(\vec{r},t) \end{pmatrix} = q \int \frac{d^3 r'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, \delta\!\left(\vec{r}' - \vec{r}_0\!\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\beta}\!\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right) \end{pmatrix}$$

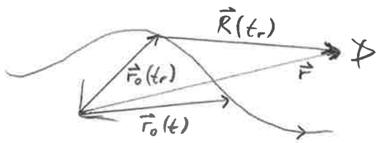
Bem.:
- $\vec{r}, t$ sind hier fest
- $\vec{r}'$ sucht Raum ab und findet δ-Zacke bei $\vec{r}' = \vec{r}_1$:
  $\vec{r}_1 - \vec{r}_0\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_1|}{c}\right) = 0$
- $\vec{r}_1$ ist ein spezielles $\vec{r}_0(\ldots)$, $\vec{r}_1 \equiv \vec{r}_0(t_r)$

$$\Rightarrow \vec{r}_0(t_r) - \vec{r}_0\left(t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}_0(t_r)|\right) = 0$$

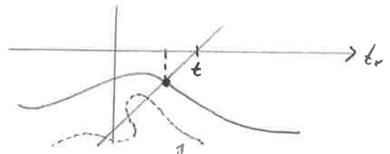
$$\Rightarrow t_r = t - \frac{1}{c}\underbrace{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_r)|}_{\equiv |\vec{R}(t_r)| = R(t_r)} \quad \text{retardierte Zeit}$$

(die frühere Zeit, zu der die t-Beobachtung verursacht wurde)

- Momentaufnahme (zur Zeit t)



- $t_r - t = -\frac{1}{c} R(t_r)$ graphisch lösen



((mehr als eine Lsg möglich ?
dann müsste irgendwo der Anstieg >1 sein,

$$\partial_{t_r}\left(-\tfrac{1}{c}R(t_r)\right) = -\frac{1}{c}\frac{1}{2R(t_r)}\,2\vec R(t_r)\left(-\dot{\vec r}_0(t_r)\right) = \frac{\vec R}{R}\cdot\vec\beta(t_r)$$

< 1 falls $|\vec\beta| < 1$: nichts schneller als c ; nein))

müssen nun das Integral auswerten :

$\vec r\,'$ nahe $\vec r_1$: $\vec r\,' = \vec r_1 + \vec\varepsilon$, $d^3r' = d^3\varepsilon$

$|\vec r - \vec r\,'| = |\vec r - \vec r_1 - \vec\varepsilon| = |\vec R - \vec\varepsilon|$, $\vec R = \vec R(t_r)$

δ-Inhalt $\equiv \vec\xi = \vec r_1 + \vec\varepsilon - \vec r_0\left(t - \frac{1}{c}|\vec R - \vec\varepsilon|\right)$

$$|\vec R - \vec\varepsilon| = \sqrt{\vec R^2 + \vec\varepsilon^2 - 2\vec R\cdot\vec\varepsilon} = R\left(1 - \frac{2\vec R\vec\varepsilon}{R^2} + \frac{\vec\varepsilon^2}{R^2}\right)^{\frac12} \approx R - \frac{\vec R\cdot\vec\varepsilon}{R} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

(Taylorentw. von $\vec r_0$)

$$= \cancel{\vec r_1} + \vec\varepsilon - \cancel{\vec r_0\left(t - \tfrac{R}{c}\right)} - \dot{\vec r}_0(t_r)\,\frac{1}{c}\frac{\vec R\cdot\vec\varepsilon}{R} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$= \vec\varepsilon - \vec\beta\,\varepsilon_\parallel \qquad \text{mit} \quad \varepsilon_\parallel \equiv \frac{\vec R}{R}\cdot\vec\varepsilon$$

$\Rightarrow$ $\delta(\vec\xi) = \delta(\xi_\parallel)\,\delta^{(2)}(\vec\xi_\perp)$ (kartesisch in $\vec R$-Richtung gedacht)

$$= \delta\left(\varepsilon_\parallel\left[1 - \tfrac{\vec R}{R}\vec\beta\right]\right)\,\delta^{(2)}\left(\vec\varepsilon_\perp - \cancel{\vec\beta_\perp\varepsilon_\parallel}\right)$$

$=0$ wegen erster δ-Fkt

$$= \frac{1}{[1-\beta_\parallel]}\,\delta^{(3)}(\vec\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\phi(\vec r,t)\\ \vec A(\vec r,t)\end{pmatrix} = \frac{q}{R - \vec\beta\cdot\vec R}\begin{pmatrix}1\\ \vec\beta\end{pmatrix}$$

(bei t_r)

insgesamt also:

$$\begin{pmatrix}\phi\\ \vec A\end{pmatrix} = q\int d^3r'\,\frac{1}{|\;|}\,\delta\left(\vec r\,' - \vec r_0\left(t - \tfrac{|\;|}{c}\right)\right)\begin{pmatrix}1\\ \vec\beta\left(t - \frac{|\;|}{c}\right)\end{pmatrix}$$

um $\vec 0$ entwickeln

$$= \frac{q}{R - \vec R\vec\beta}\begin{pmatrix}1\\ \vec\beta\end{pmatrix}\Bigg|_{t_r} , \quad \text{wobei} \quad \vec R(t) \equiv \vec r - \vec r_0(t), \quad t_r \equiv t - \tfrac{1}{c}R(t_r)$$

Bem.:
- für bewegte Ladungen gilt Coulomb nicht mehr
- Felder zu $\binom{\phi}{\vec A}$ ausrechnen ? s. §9.5

Bsp (Punktladung mit konstanter Geschwindigkeit)

sei $\vec r_0(t) = \vec e_1 vt$

$\Rightarrow$ $\vec\beta(t) = \vec e_1\frac{v}{c}$, $\vec R(t) = \vec r - \vec e_1 vt = \begin{pmatrix}x - vt\\ y\\ z\end{pmatrix}$

bestimme retardierte Zeit :

$t_r = t - \frac{1}{c}\sqrt{(x - vt_r)^2 + \varrho^2}$ $\quad(\varrho^2 = y^2 + z^2)$

$\dots \Leftrightarrow (1-\beta^2)(x - vt_r) = x - vt + \beta\sqrt{(x-vt)^2 + (1-\beta^2)\varrho^2}$

((nur eine Lsg, da $t_r < t$))

$$\Rightarrow R - \vec\beta\cdot\vec R = c(t - t_r) - \beta(x - vt_r)$$
$$= \frac{1}{\beta}\left[(1-\beta^2)(x - vt_r) - x + vt\right]$$
$$= \sqrt{\;\;} = \sqrt{1-\beta^2}\sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}(x-vt)^2 + \varrho^2}$$

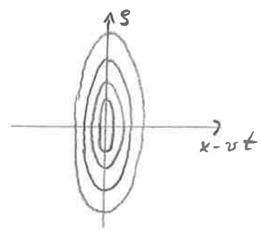
$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\phi\\ A_1\end{pmatrix} = \frac{q\gamma}{\sqrt{\gamma^2(x-vt)^2 + \varrho^2}}\begin{pmatrix}1\\ \beta\end{pmatrix} , \quad \text{wobei} \quad \vec A = A_1\vec e_1,\ \beta = v/c,\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \geq 1$$

$\rightsquigarrow$ Äqui-ϕ-Flächen, $\phi = $ const. :

$\frac{(x-vt)^2}{1-\beta^2} + \varrho^2 = $ const.

sind Ellipsen, $\frac{x^2}{a^2}\dots$, $a<1$

(Coulomb wären Kreise)



x-Skala verkürzt : Längenkontraktion

$\Rightarrow$ Fazit: Max $\rightarrow$ Rel.-Theorie !

9.3 Feldenergie

(bzw.: "Energie im Feld")

⇝ falls in der emm Welt "Energie" erhalten ist,
dann folgt dies aus (Max 1), …, (Max 4), $(m\ddot{\vec r} = \vec F_L)$ (s. Postkarte, S. 74)

Wunschvorstellung: ∂_t  $= 0$

- Energie, was ist das? wie kam das ins Spiel?

  Bewegungsglg $\cdot$ (Unbekannte)$^{\text{ein} \cdot \text{weniger}}$, $\partial_t(\,\cdot\,^2) = \ldots$

  und sehe nach, ob $\ldots = \partial_t(\ldots)$.

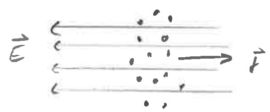
- Mechanik: $m\ddot{\vec r} = q\,(\vec E + \dot{\vec r}\times\vec B/c) \quad |\cdot\dot{\vec r}$

  $$\underbrace{\partial_t\left(\tfrac{m}{2}\vec v^2\right)}_{\equiv T} = q\,\vec v\cdot\vec E = \frac{\text{Kraft}\cdot\text{Weg}}{\text{Zeit}} \overset{?}{=} -\partial_t V(\vec r(t)) \quad \text{falls } q\vec E = -\vec\nabla V(\vec r)$$

  ($q\vec v$: $\int d^3r\, \vec v\, \rho$; $\vec E$: gegeben)

  nun viele Teilchen in V mit mittl. Geschw. $\vec v(\vec r,t)$

  $$\sum_V \tfrac{m}{2}\vec v^2 \equiv T_V$$

  hier: T_V nimmt ab

  $$\partial_t T_V + \int_V d^3r\, \underbrace{(-\vec j\cdot\vec E)}_{\frac{\text{von den Teilchen verrichtete Arbeit}}{\text{Zeit}\cdot\text{Vol}}} = 0$$

- Elektromagnetik: nur (Max 2), (Max 4) sind Bewegungsglgn.

  $$-(\text{Max }4):\quad \dot{\vec E}/c - \vec\nabla\times\vec B = -\tfrac{4\pi}{c}\vec j \quad |\cdot\vec E$$

  $$(\text{Max }2):\quad \dot{\vec B}/c + \vec\nabla\times\vec E = \vec 0 \quad |\cdot\vec B\text{, addiere}$$

  $$\underbrace{\tfrac{1}{c}(\vec E\cdot\dot{\vec E} + \vec B\cdot\dot{\vec B})}_{1} + \underbrace{\vec B\cdot(\vec\nabla\times\vec E) - \vec E\cdot(\vec\nabla\times\vec B)}_{2} = -\tfrac{4\pi}{c}\vec j\cdot\vec E \quad \Big|\cdot\frac{c}{4\pi}$$

$$1 = \tfrac12\partial_t(\vec E^2 + \vec B^2)$$

$$\vec\nabla\cdot(\vec E\times\vec B) = \varepsilon^{ijk}\partial_i E_j B_k = B_k\,\varepsilon^{ijk}\partial_i E_j + E_j\,\varepsilon^{ijk}\partial_i B_k = B_k\,\varepsilon^{kij}\partial_i E_j - E_j\,\varepsilon^{jik}\partial_i B_k = \vec B\cdot(\vec\nabla\times\vec E) - \vec E\cdot(\vec\nabla\times\vec B) = 2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\partial_t \underbrace{\tfrac{1}{8\pi}(\vec E^2 + \vec B^2)}_{\equiv U} + \vec\nabla\cdot\underbrace{\tfrac{c}{4\pi}\vec E\times\vec B}_{\equiv\vec S} = \underbrace{-\vec j\cdot\vec E}_{\frac{\text{Energie-Prod.}}{\text{Zeit}\cdot\text{Vol.}} = -(T_V)^\cdot}}$$

$\vec S$: Poynting-Vektor

$$\Leftrightarrow \partial_t U + \vec\nabla\cdot\vec S = -\vec j\cdot\vec E \qquad \text{"Poynting-Theorem"}$$

Bem.:
- dies ähnelt der Form der Kontinuitätsglg $\partial_t\rho + \vec\nabla\cdot\vec j = 0$ (vgl. § 6.1, S. 76)
- daher könnte man auch von "Energie-Kontinuitätsglg." sprechen
- dann wäre U = Energie-Dichte eines felderfüllten Raumes, $\vec S$ = Energie-Stromdichte ✓.

- invar. unter $U \to U + U_0(\vec r)$, $\vec S \to \vec S + \vec\nabla\times\vec C$

  $U_0, \vec C$ nicht beobachtbar (an keiner Physik beteiligt)
  $U_0, \vec C$ würden auch bei feldfreiem Raum vorhanden sein
  $U_0 = 0$, $\vec C = \vec 0$ ist einfachste Wahl

→ Interpretation der RHS?
betrachte $\int_V d^3r\ |\text{E-Konti.}|$, V zeitunabh.

$$\partial_t\int_V d^3r\, U + \int_V d^3r\,\vec\nabla\cdot\vec S = \int_V d^3r\,(-\vec j\cdot\vec E)$$

(S. Gauss) $\int_V d^3r\,\vec\nabla\cdot\vec S = \oint_{\partial V} d\vec f\cdot\vec S = 0$ falls $\vec S = \vec 0$ auf Oberfläche

$\int_V d^3r\,(-\vec j\cdot\vec E) = -\partial_t T_V$, s. S. 113

falls also $\vec E, \vec B, \rho, \vec j$ ganz in V sind:

$\Leftrightarrow \partial_t \left(\int_V d^3r\, U + T_V \right) = 0$

Bem.: • erstmals eine Gesamtenergieerhaltung in einer vollständigen Theorie erhalten.

Bsp (harmonische ebene em Welle; vgl. §7, S. 92)

$\vec E = \vec E_0 \cos(\vec k \vec r - \omega t)$, $\vec B = \frac{\vec k}{k} \times \vec E$, $\vec E_0 \perp \vec k$, $\omega = ck$ (Vac)

$\Rightarrow U = 2\, \frac{1}{8\pi} E_0^2 \cos^2(\vec k \vec r - \omega t)$

$\vec S = \frac{c}{4\pi} \frac{\vec k}{k} E_0^2 \cos^2(\vec k \vec r - \omega t)$

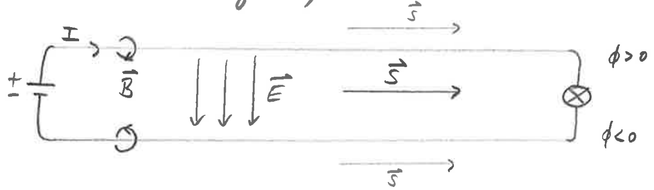
$\Rightarrow \partial_t U + \vec\nabla \cdot \vec S = \frac{E_0^2}{4\pi} \Big\{ -2\underbrace{\omega}_{ck} \cos\cdot\sin + \frac{c}{k} 2k^2 \cos\cdot\sin \Big\}$

$= 0$, Kontinuitätsglg ✓✓

(da alle Energie-Anteile mit c fliegen, müsste "$\vec j = \rho \cdot \vec v$" gelten: $\vec S \overset{?}{=} U\, c \frac{\vec k}{k}$, ja.)

Bsp Energie-Übertragung zum Verbraucher

($E_{kin}(e^-)$ vernachlässigbar)



Bem.: • die $\int_V$ $\boxed{\text{E-Konti}}$ auf S.114 unten interpretieren wir so:

die Energie U der em Felder kann sich dadurch ändern, dass Energie auf die geladenen Teilchen übertragen wird (RHS) oder dass em Energie durch die Oberfläche verloren geht (LHS_2).

• "potentielle Energie" ist im Feld

$\rightsquigarrow$ will zeigen, dass $\underset{\text{fest}}{\oplus}$ $\oplus \rightarrow$ zu entsprechender $\int d^3r\, U$ - Zunahme führt

betrachte allg. statische Ladungsverteilung $\rho(\vec r)$, summiere über potentielle E (denke paarweise: $\sum_{i,j} V(\vec r_i - \vec r_j)$)

$\frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\vec r)\rho(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|} = \frac{1}{2}\int d^3r\, \rho(\vec r)\, \phi(\vec r)$ ((ret) Pot, S. 95)

$= \frac{1}{8\pi}\int d^3r\, \phi(\vec r)\, \vec\nabla\cdot\vec E$ (Max1 benutzt)

$= -\frac{1}{8\pi}\int d^3r\, \vec E \cdot \vec\nabla\phi$ (PI, Randterm = 0)

$(\vec E = -\vec\nabla\phi - \dot{\vec A}/c)$

$= \int d^3r\, \frac{1}{8\pi}\vec E^2$, vgl. U-Anteil ✓✓

• dasselbe für statische Stromverteilung $\vec j(\vec r)$

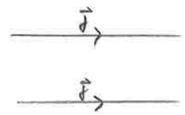
$\int d^3r\, \frac{1}{8\pi}\vec B^2 = \frac{1}{8\pi}\int d^3r\, \vec B\cdot(\vec\nabla\times\vec A)$

$= \varepsilon^{ijk} B_i \partial_j A_k \overset{(PI)}{=} -\varepsilon^{ijk} B_i \partial_j A_k = +\varepsilon^{kji} A_k \partial_j B_i$

$= \frac{1}{8\pi}\int d^3r\, \vec A\cdot(\vec\nabla\times\vec B)$

$= \frac{1}{2c}\int d^3r\, \vec A(\vec r)\cdot\vec j(\vec r)$ (Max4 benutzt, $\dot{\vec E} = 0$)

$= \frac{1}{2}\int d^3r \int d^3r' \frac{\vec j(\vec r)\cdot\vec j(\vec r')}{c^2|\vec r - \vec r'|}$ ((ret.) Pot eingesetzt)



ziehen sich an (Lorentzkraft!).

drücke Drähte (um da) auseinander

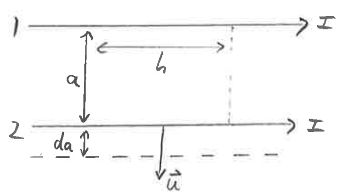
$\rightarrow$ Arbeit (dE_1) wird am System verrichtet.

aber: $|\vec r - \vec r'|$ wird größer

$\rightsquigarrow \frac{1}{|\ldots|}$ wird kleiner, RHS wird kleiner,

$LHS \sim \vec B^2 \in U$ wird kleiner !$\frac{?}{?}$

|| • wie löst sich das Paradoxon auf S. 116 unten auf?



① q in Draht 2 erfährt Lorentzkraft $\vec{F}_L = q\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}$

⇒ Drähte ziehen sich an.

↝ beim Auseinanderdrücken (um da) wird Arbeit verrichtet; wo steckt die entsprechende Energie dE?

(($dE = |\vec{F}|\cdot da$, $|\vec{F}| = q\frac{v}{c}B_1 \to \frac{1}{c}\int j_2 B_1 = \frac{1}{c}hIB_1$

B-Feld um Draht, beim Abstand a: $B_1 = \frac{2I}{ca}$, s. z.B. §6.3, S. 86

$= \frac{2I^2}{ca^2}\cdot h\cdot da$))

② aber in Feldenergie $U \sim \vec{B}^2 \sim \int \frac{\vec{j}\cdot\vec{j}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ wird Nenner größer

⇒ $dE_② \sim \vec{B}^2 < 0$ (und sogar $= -dE$)

es gilt aber weitere Beiträge?!

③ {während der Zeit $dt = \frac{da}{u}$, in der man den Draht 2 mit Geschwindigkeit $\vec{u}$ um da verschiebt}, wirkt auf q in Draht 2 eine zusätzliche Lorentzkraft $q\frac{\vec{u}}{c}\times\vec{B}$

⇒ $dE_③ > 0$ (und sogar $= dE$)

④ {…}, ändert sich $\vec{B}$

↝ $\vec{\nabla}\times\vec{E} \neq \vec{0}$ (wegen Max2)

und $q\vec{E}$ beschleunigt Ladungen in Draht 1

⇒ $dE_④ > 0$ (und sogar $= dE$)

$dE = -dE + dE + dE$, alles OK.))

↝ sind alle Manipulationen an Max durchgespielt?

am Bsp (Max4):

$\vec{\nabla}\cdot$ (Max4)	⇒	Kontinuitätsgl.	(§6.2, S. 79)
$\vec{\nabla}\times$ (Max4)	⇒	Wellengl.	(vgl. §7, S. 92)
$\vec{E}\cdot$ (Max4)	⇒	En.-Konti.	(§9.3, S. 113/114)
$\vec{B}\times$ (Max4), $\vec{E}\times$ (Max2)	⇒	?	

Feldimpuls

$$\vec{B}\times \,|\quad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \dot{\vec{E}}/c = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad \text{(Max4)}$$

$$\vec{E}\times \,|\quad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \dot{\vec{B}}/c = \vec{0} \qquad \text{(Max2)}, \text{ addiere}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{B}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}) - \frac{1}{c}\vec{B}\times\dot{\vec{E}}$$
$$+\vec{\nabla}(\vec{E}\cdot\vec{E}) - \vec{E}(\vec{E}\cdot\vec{\nabla}) + \frac{1}{c}\vec{E}\times\dot{\vec{B}} = \frac{4\pi}{c}\vec{B}\times\vec{j}$$

$$\Leftrightarrow \partial_t\left(\frac{1}{c}\vec{E}\times\vec{B}\right) + \vec{\nabla}\left(\tfrac{1}{2}\vec{E}^2 + \tfrac{1}{2}\vec{B}^2\right) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}\times\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{E}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}$$

addiere diese Zeile ⟶ $+\vec{B}(\vec{\nabla}\vec{B}) + \vec{E}(\vec{\nabla}\vec{E} - 4\pi\rho)$ | $\cdot\frac{1}{4\pi}$

(= 0 wegen Max1, Max3)

$$\Leftrightarrow \partial_t\Big(\underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B}}_{=\vec{S},\ \text{s. S. 114}}\Big) + \frac{1}{4\pi}\Big\{\vec{\nabla}\underbrace{\tfrac{1}{2}(\vec{E}^2+\vec{B}^2)}_{=4\pi U} - (\vec{E}\cdot\vec{\nabla})\vec{E} - \vec{E}(\vec{\nabla}\vec{E}) - (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\Big\} =$$

$$= -\underbrace{\left(\rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}/c\right)}_{\equiv\vec{f}_L}$$

schreibe dies nun als (Vorzeichen sind Konvention)

$$\boxed{\partial_t\frac{\vec{S}}{c^2} - \vec{\nabla}\overleftrightarrow{T} = -\vec{f}_L}$$

(bzw. in Komponenten: $\partial_t\frac{S_j}{c^2} - \partial_i T_{ij} = -f_{L_j}$)

es gilt $\{\ldots\}_j = \partial_j\frac{1}{2}(\vec{E}^2+\vec{B}^2) - E_i\partial_i E_j - E_j\partial_i E_i - B_i\partial_i B_j - B_j\partial_i B_i$

$= \partial_i\left[\delta_{ij}\frac{1}{2}(\vec{E}^2+\vec{B}^2) - E_iE_j - B_iB_j\right]$

$\equiv -4\pi\,\partial_i T_{ij}$

↳ Maxwellscher Spannungstensor

⇒ s. Ü53

↝ Gesamtimpuls-Erhaltung einer vollständigen (emm) Welt

Bem.:

- lese dies wieder als "Kontinuitätsglg",
  dann könnte man $\frac{\vec{S}}{c^2}$ = Impuls-Dichte
  und T_{ij} = Impuls-Stromdichte nennen
- $\vec{f}_L$ auf der RHS ist die Lorentzkraftdichte; beschreibt Zeitableitung der Impulsdichte der "geladenen Materie"
- es gilt $Sp(T) = \sum_{i=1}^{3} T_{ii} = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{3}{2}(\vec{E}^2+\vec{B}^2) - \vec{E}^2 - \vec{B}^2\right]$
  $= -\frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2+\vec{B}^2) = -u$

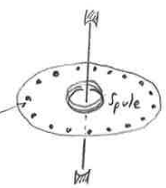
  $\Rightarrow u + Sp(T) = 0$

  z.B. (Zirkel) ebene Welle in x-Richtg $T = \begin{pmatrix} -u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  Isotropes Licht $T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}u & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}u & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}u \end{pmatrix}$

- Licht-"Wucht" ist klein, da Impuls-Dichte = $\frac{\vec{S}}{c^2}$
  (aber z.B. Sonnensegel als Antrieb ?)
- ein Volumen Feld hat also den
  Impuls $\vec{P}_V = \int_V d^3r \frac{1}{4\pi c} \vec{E}\times\vec{B}$
  und daher auch einen (Gesamt-)
  Drehimpuls $\vec{L}_V = \int_V d^3r\ \vec{r}\times\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{4\pi c}$

((kann $\vec{L}_V$ auch sichtbar machen: "Feynman-Scheibe",
[The Feynman Lectures on Physics, Vol. 2, § 17.4]
B-Feld aus → Scheibe dreht!))

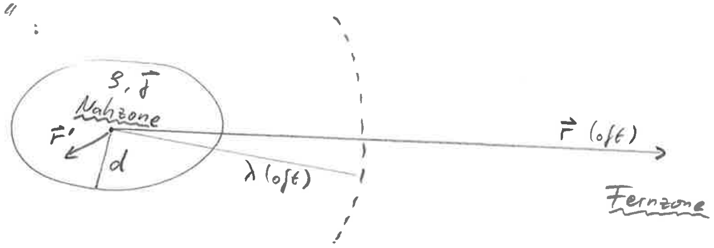


9.4 (Aus-) Strahlung : Sender

⇝ wollen wieder eine Näherung in den retardierten Potentialen aus § 8 durchführen:

"Sender-Physik":

in endl. Bereich wackelt $\rho, \vec{j}$



Bsp	d	λ	r
TV-Sender	10 m	$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{\nu} = \frac{3\cdot 10^8\ m/s}{1\ MHz} = 300m$	10^4 m
Atom	10^{-10} m	$\lambda_{grün} = 5000\ Å = 500\ nm = 5\cdot 10^{-7} m$	1 m

betrachte monochromatischen Sender: $\vec{j}(\vec{r},t) = \vec{j}_0(\vec{r}) \sin(\omega t)$
$\qquad$ ↖ gegeben ↗

Konti: $\dot{\rho} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = -\sin(\omega t)\ \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_0(\vec{r})$

Lsg: $\rho(\vec{r},t) = \rho_0(\vec{r})\cos(\omega t)$, $\rho_0(\vec{r}) = \frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_0(\vec{r})}{\omega}$

Strategie / weiteres Vorgehen: ret. Pot. $\Rightarrow \vec{A}$; $\vec{A} \Rightarrow \vec{B}$; $(\text{Max } 4) \Rightarrow \vec{E}$

schreibe $\vec{j}(\vec{r},t) = -Im\left(e^{-i\omega t}\vec{j}_0(\vec{r})\right)$ $\qquad$ (($e^{ix} = \cos x + i\sin x$))

- ret. Pot (§ 8, S. 95)

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int\frac{d^3r'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}(-1)\,Im\left(e^{-i\omega[t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}]}\vec{j}_0(\vec{r}')\right)$$

$$= -\frac{1}{c}Im\left(e^{-i\omega t}\underbrace{\boxed{\int d^3r'\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\vec{j}_0(\vec{r}')}}_{\equiv\ \vec{a}(\vec{r})}\right), \quad k = \frac{\omega}{c}$$

- Nahzone: $r \overset{\downarrow}{\sim} |\vec r - \vec r'| \overset{\downarrow}{\sim} d \ll \lambda \overset{\downarrow}{\sim} 1/k$ "Größenordnung"

  $\Rightarrow e^{ik|\vec r - \vec r'|} \approx 1$

  Felder folgen (den Strömen) instantan, oder "adiabatisch"

  haben ωt-modulierte Statik

- Fernzone: $d \overset{?}{\ll} \lambda \lll r$ erlaubt folgende drei Näherungen:

(I) in $\vec a(\vec r)$, $\frac{1}{|\vec r - \vec r'|} \to \frac{1}{r}$

(II) in $\vec a(\vec r)$, $e^{ik|\vec r - \vec r'|} = e^{ik\left[r - \frac{\vec r \cdot \vec r'}{r} + O\left(\frac{d^2}{r}\right)\right]}$ (Taylor für $\sqrt{\ }$)

$$\vec n \equiv \frac{\vec r}{r} \quad = \underbrace{e^{ikr}}_{\text{vor Integral ziehen}} \; \underbrace{e^{\overbrace{-ik\vec n \cdot \vec r'}^{O(d/\lambda)}}}_{e\text{-Reihe!}} \; \underbrace{e^{O(d^2/\lambda r)}}_{=1}$$

(III) $\partial_x \frac{e^{ikr}}{r} = \underbrace{\frac{1}{r}\partial_x e^{ikr}}_{O\left(\frac{1}{r\lambda}\right)} + \cancel{\underbrace{e^{ikr}\partial_x \frac{1}{r}}_{O\left(\frac{1}{r^2}\right)}} \longrightarrow \frac{1}{r}\partial_x e^{ikr}$

$$\Rightarrow \vec a(\vec r) \overset{(I),(II)}{=} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r' \, e^{-ik\vec n \cdot \vec r'} \, \vec j_0(\vec r')$$

$$= \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (-ik)^l \int d^3r' \, (\vec n \cdot \vec r')^l \, \vec j_0(\vec r')$$

$$\approx \underbrace{\frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r' \, \vec j_0(\vec r')}_{=\vec a_1} + \underbrace{\frac{e^{ikr}}{r} \frac{(-ik)}{r} \int d^3r' \, (\vec n \cdot \vec r') \, \vec j_0(\vec r')}_{=\vec a_2} + \dots$$

(Kugelwelle)

Bem: • diese Entwicklung: Multipolstrahlung

• allg. $\frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|}$ nach Kugelflächenfkt. entwickeln:

s. z.B. [Jackson, §16]

$$\frac{e^{ik|\vec r - \vec r'|}}{4\pi|\vec r - \vec r'|} \overset{r'<r}{=} ik \sum_{l=0}^{\infty} j_l(kr') \, h_l^{(1)}(kr) \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta', \varphi') \, Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

((sphärische Bessel-Funktionen))

(vgl. S. 105/106)

Bsp: Dipolstrahlung (El-Strahlung, Hertz'scher Dipol)

$\equiv \vec a_1$ - Anteil

betrachte $\int d^3r \, \vec j_0(\vec r) = \int d^3r \, (\vec j_0 \cdot \vec\nabla)\vec r \overset{\text{PI, Rand}}{=} -\int d^3r \, \vec r \, (\underbrace{\vec\nabla \cdot \vec j_0}_{= i\omega\rho})$ (s. S. 120)

$= -\omega \int d^3r \, \vec r \rho_0(\vec r)$

$= -\omega \vec p_0$ $\quad \vec p_0$ = Dipolmoment (vgl §9.1, S. 103)

$\Rightarrow \vec A = \frac{\omega}{c} \vec p_0 \, Im\left(e^{-i\omega t} \frac{e^{ikr}}{r}\right)$ [$\frac{\omega}{c} = k$]

$\Rightarrow \vec B = \vec\nabla \times \vec A \overset{\text{Näherg (III)}}{=} k \, Im\left(\frac{e^{-i\omega t}}{r} \vec\nabla e^{ikr}\right) \times \vec p_0$

(Nabla in Kugelkoord.) $= \vec e_r \partial_r e^{ikr} = ik\vec n e^{ikr}$

$Im(i[a+ib]) = a = Re([a+ib])$

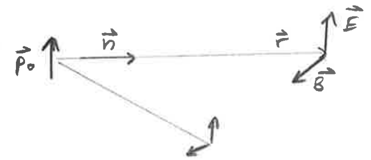
$= k^2 \, \vec n \times \vec p_0 \, Re\left(\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\right) = k^2 \, \vec n \times \vec p_0 \, \frac{\cos(kr-\omega t)}{r}$

$\Rightarrow$ (Max 4): $\dot{\vec E} = c\, \vec\nabla \times \vec B - \cancel{4\pi \vec j}$ Fernzone

$\hookrightarrow$ in $Re(\dots)$, $\vec\nabla \overset{(III)}{\to} ik\vec n = \frac{ik\vec n}{-i\omega}\partial_t$

$\Rightarrow \vec E = c \frac{k}{-\omega} \vec n \times \vec B = \vec B \times \vec n$

also:



Richtungen: wie ebene Welle (§7, S. 92)

Ampl $\sim 1/r$, weil Energie $\sim$ Feld^2 (vgl. §9.3, S. 114)

nichts wird in $\vec p_0$-Richtung abgestrahlt (wegen $\times$)

Bsp: M1- und E2-Strahlung

$= \vec{a}_2$- Anteil

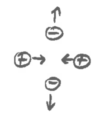
$$\vec{a}_2 = -ik\,\frac{e^{ikr}}{r^2}\underbrace{\int d^3r'\,(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')\,\vec{j}_0(\vec{r}\,')}$$

ähnlich magn. Dipolmoment
vgl. §9.1, S. 107, Term ②
nun aber $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_0 = \omega\varrho_0 \neq 0$

$$= c\,\vec{m}_0\times\vec{r} - \frac{\omega}{2}\int d^3r'\,\left[\vec{r}\,'(\vec{r}\,'\cdot\vec{r})\right]\varrho_0(\vec{r}\,')$$

$$\left(\!\left(= \underbrace{c\,\vec{m}_0\times\vec{r}} - \frac{\omega}{2}\,\underbrace{\frac{1}{3}\left(D\vec{r} + \left(\int d^3r'\,\vec{r}\,'^2\varrho_0(\vec{r}\,')\right)\vec{r}\right)} \right)\!\right)$$

magn. Dipolstrahlung (M1) el. Quadrupolstrahlung (E2)



((mit magn. Dipolmoment $\vec{m}_0 \equiv \frac{1}{2c}\int d^3r\;\vec{r}\times\vec{j}_0(\vec{r})$, s. S. 108))

Bem: beide Anteile (M1), (E2) sind $\mathcal{O}(d/\lambda)\cdot(E1)$

- Rückblick: statische Multipole : $\frac{1}{|r-r'|}$ entwickeln
  Strahlungs-Multipole : $e^{ik|r-r'|}$ entwickeln

- allg. Sender

  ist Superposition monochromatischer Sender
  evtl. Phasenverschoben, $\cos(\omega t) = \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ etc.

  $$\vec{j}(\vec{r},t) = \int\frac{d\omega}{2\pi}\,\tilde{\vec{j}}(\vec{r},\omega)\,e^{-i\omega t}$$

9.5 Beschleunigte Punktladung

→ Erinnerung: §9.2, Liénard-Wiechert Potentiale

Punktladung q auf Bahn $\vec{r}_0(t)$ $\quad$ (($\vec{\beta}(t) \equiv \partial_t\vec{r}_0(t)/c$))

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\phi\\ \vec{A}\end{pmatrix}_{\vec{r},t} = \frac{q}{R - \vec{R}\cdot\vec{\beta}(t_r)}\begin{pmatrix}1\\ \vec{\beta}(t_r)\end{pmatrix}, \qquad \vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}_0(t_r), \quad t_r = t - R/c$$

Felder zu diesen Potentialen?

mittels $\partial_t = t_r'^{\,t}\,\partial_{t_r}$, $\quad t_r'^{\,t} = 1 - \frac{1}{c}\partial_t|\vec{R}| = 1 - \frac{1}{c}\frac{\vec{R}\cdot\partial_t\vec{R}}{R}$

$$\overset{!}{=} 1 - \frac{1}{c}\,t_r'^{\,t}\,\frac{\vec{R}}{R}\cdot(-c\vec{\beta}(t_r))$$

$$\Leftrightarrow t_r'^{\,t} = \frac{1}{1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}}, \qquad \vec{n} \equiv \frac{\vec{R}}{R}$$

erhält man

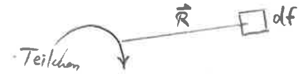
$$\vec{E} = q\,\frac{\vec{n}-\vec{\beta}}{\gamma^2(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})^3 R^2}\bigg|_{t_r} + \frac{q}{c}\,\frac{\{\vec{n}\times([\vec{n}-\vec{\beta}]\times\dot{\vec{\beta}})\}}{(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})^3\,R}\bigg|_{t_r}$$

keine Strahlung $\qquad$ Strahlung!

$$\vec{B} = \text{(ähnlich)} + \vec{n}\times\vec{E}_{Strahlung}$$

((check?! z.B. $\vec{E}$ für $\vec{r}_0(t) = \vec{e}_1 vt$, vgl. §9.2, S. 112 ⇝ keine Str.))

⇒ Energie-Stromdichte $\quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)_{Strahlung} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}^2_{Str}\,\vec{n}$



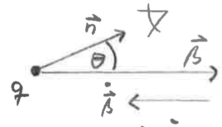
$$\overset{!}{=} \frac{\text{Energie}}{\text{Zeit}\cdot\text{Fläche}}\cdot\overrightarrow{\text{Richtg}} = \frac{d^2\mathcal{E}}{dt\,df}\cdot\vec{n}$$

⇒ Energie-Verlust des Teilchens, pro Zeit und Raumwinkel $d\Omega$

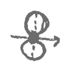
$$\frac{d^2\mathcal{E}}{dt_r\,d\Omega} = R^2(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})\,|\vec{S}| = \frac{q^2}{4\pi c}\,\frac{\{\vec{n}\times([\vec{n}-\vec{\beta}]\times\dot{\vec{\beta}})\}^2}{(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})^5}$$

$$dt_r = \frac{dt}{1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}}, \qquad d\Omega = \frac{df}{R^2}$$

Bsp Bremsstrahlung : $\quad \frac{d^2\mathcal{E}}{dt_r\,d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3}\,|\ddot{\vec{r}}_0(t_r)|^2\,\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}$



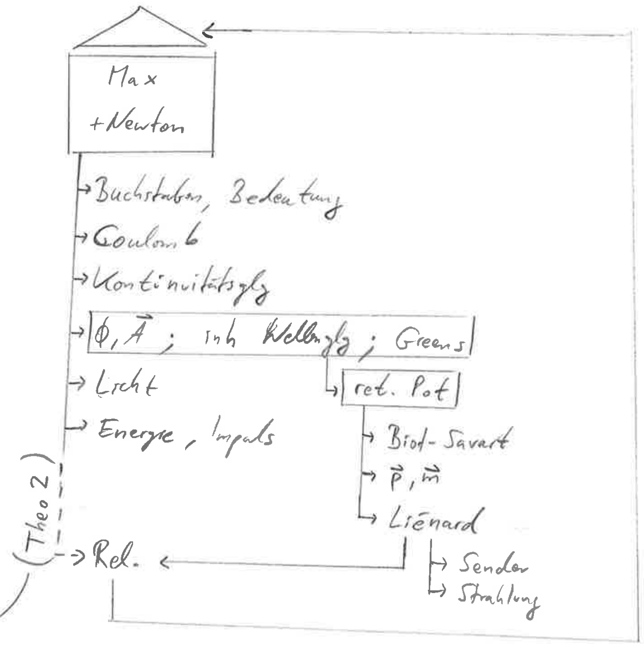
$\Rightarrow \vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}} = 0$

a) $\beta = 0$  , $dt_r = dt$

b) $\beta \lesssim 1$ 

10. Ausblick

Standort:



Weiter:

→ alle Bausteine der ED in 4er-Notation: Eleganz! (s. §5)

4-Stromdichte $j = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$ ⇝ Konti.: $\partial_\mu j^\mu = 0$

((check: $x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}$, $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\partial_\mu j^\mu = \partial_0 j^0 + \partial_i j^i = \partial_{ct}(c\rho) + \partial_{x^i} j^i = \dot{\rho} + \vec{\nabla}\vec{j}$))

4-Potential $A = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$ ⇝ Max: $\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$

((in Lorenz-Eichg)) $\left(\left(= \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 = \Box \right)\right)$

Feldstärketensor $F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ ⇝ Max: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$

((ohne Eichbed.; s. auch Ü54))

((mit Feldern: $F^{i0} = -F^{0i} = E^i$, $F^{ij} = -F^{ji} = -\varepsilon^{ijk} B^k$, $F^{00} = 0 = F^{ii}$))

(($u^\mu = \partial_\tau x^\mu$, S.68; $p^\mu = m u^\mu$, S.72)) ⇝ Newton: $\partial_\tau p^\mu = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu$

((mit $\vec{F}_{Lorentz} = q\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}/c$))

Querverbindungen

⇝ haben dieses Semester einige sehr grundlegende und wichtige Prinzipien kennengelernt, die weiter verallgemeinert werden können:

- Prinzip der kleinsten Wirkung

  hier: klass. Mechanik, $\delta S = 0$

  später: Quantenmechanik (Theorie II)

  Quantenfeldtheorie (im Master), Pfadintegrale

- Hamiltonsche Bwgl.

  hier: klass. Mechanik, $\dot{x}(t) = \{x, H\}$ (Poisson-Klammer), $\dot{p}(t) = \{p, H\}$, $\{x, p\} = 1$

  später: Quantenmechanik (Theorie II), $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ (Kommutator)

  $i\hbar \partial_t \hat{x}(t) = [\hat{x}, \hat{H}]$ etc

- Eichinvarianz

  hier: Elektrodynamik, $A^\mu \to A^\mu - \partial^\mu \chi$ gleiche Physik

  später: Elementarteilchenphysik (5. Semester)

  Konstruktion des "Standardmodells"

- Relativitätsprinzip

  hier: in spez. Rel., Inertialsysteme, $\Lambda^\mu{}_\nu$ L-Trafo

  später: Allgemeine Rel., Schwerkraft ⇔ Beschleunigung

  allg. Koord.-Trafo

  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, $g_{\mu\nu} \neq \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$