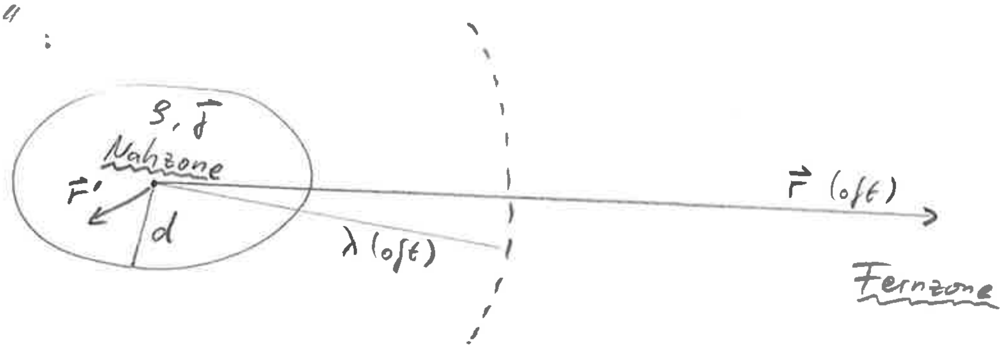
9.4 (Aus-) Strahlung : Sender

$\rightsquigarrow$ wollen wieder eine Näherung in den retardierten Potentialen aus §8 durchführen :

"Sender-Physik" :

in endl. Bereich wackelt $\rho, \vec{j}$



Bsp	d	λ	r
TV-Sender	$10\,m$	$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{\nu} = \frac{3\cdot 10^8\, m/s}{1\, MHz} = 300\,m$	$10^4\,m$
Atom	$10^{-10}\,m$	$\lambda_{grün} = 5000\,Å = 500\,nm = 5\cdot 10^{-7}\,m$	$1\,m$

betrachte monochromatischen Sender : $\vec{j}(\vec{r},t) = \underbrace{\vec{j}_0(\vec{r})}\, \sin(\underbrace{\omega} t)$ gegeben

Konti : $\dot{\rho} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = -\sin(\omega t)\, \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_0(\vec{r})$

Lsg: $\rho(\vec{r},t) = \rho_0(\vec{r})\cos(\omega t)$, $\rho_0(\vec{r}) = \frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_0(\vec{r})}{\omega}$

Strategie / weiteres Vorgehen : ret. Pot. $\Rightarrow \vec{A}$; $\vec{A} \Rightarrow \vec{B}$; (Max 4) $\Rightarrow \vec{E}$

schreibe $\vec{j}(\vec{r},t) = -\,\mathrm{Im}\left(e^{-i\omega t}\, \vec{j}_0(\vec{r})\right)$ $\quad \left(\left(e^{ix} = \cos x + i \sin x \right)\right)$

- ret. Pot (§8, S. 95)

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int \frac{d^3r'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,(-1)\,\mathrm{Im}\left(e^{-i\omega\left[t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right]}\,\vec{j}_0(\vec{r}')\right)$$

$$= -\frac{1}{c}\,\mathrm{Im}\left(e^{-i\omega t}\underbrace{\boxed{\int d^3r'\, \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\vec{j}_0(\vec{r}')}}_{\equiv\, \vec{a}(\vec{r})}\right) \quad , \quad k = \frac{\omega}{c}$$

- Nahzone: $r \overset{\text{"Größenordnung"}}{\sim} |\vec r - \vec r'| \sim d \ll \lambda \sim 1/k$

$\Rightarrow e^{ik|\vec r - \vec r'|} \approx 1$

Felder folgen (den Strömen) instantan, oder "adiabatisch"

haben ωt-modulierte Statik

- Fernzone: $d \overset{?}{\ll} \lambda \lll r$ erlaubt folgende drei Näherungen:

(I) in $\vec a(\vec r)$, $\frac{1}{|\vec r - \vec r'|} \to \frac{1}{r}$

(II) in $\vec a(\vec r)$, $e^{ik|\vec r - \vec r'|} = e^{ik\left[r - \frac{\vec r \cdot \vec r'}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{d^2}{r}\right)\right]}$ (Taylor für $\sqrt{\ }$)

$\vec n \equiv \frac{\vec r}{r}$ $= \underbrace{e^{ikr}}_{\substack{\text{vor}\\ \text{Integral}\\ \text{ziehen}}} \underbrace{\underbrace{e^{-ik\vec n \cdot \vec r'}}_{\mathcal{O}(d/\lambda)}}_{\text{e-Reihe!}} \underbrace{e^{\mathcal{O}(d^2/\lambda r)}}_{=1}$

(III) $\partial_x \frac{e^{ikr}}{r} = \underbrace{\frac{1}{r}\partial_x e^{ikr}}_{\mathcal{O}\left(\frac{1}{r\lambda}\right)} + \cancel{\underbrace{e^{ikr}\partial_x \frac{1}{r}}_{\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)}} \longrightarrow \frac{1}{r}\partial_x e^{ikr}$

$$\Rightarrow \vec a(\vec r) \overset{(I),(II)}{=} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r'\, e^{-ik\vec n \cdot \vec r'}\, \vec j_0(\vec r')$$

$$= \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} (-ik)^\ell \int d^3r'\, (\vec n \cdot \vec r')^\ell\, \vec j_0(\vec r)$$

$$\approx \underbrace{\frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r'\, \vec j_0(\vec r')}_{=\vec a_1} + \underbrace{\frac{e^{ikr}}{r} \frac{(-ik)}{r} \int d^3r'\, (\vec r \cdot \vec r')\, \vec j_0(\vec r')}_{=\vec a_2} + \dots$$

(Kugelwelle)

Bem: • diese Entwicklung: Multipolstrahlung

• allg. $\frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|}$ nach Kugelflächenfkt. entwickeln:

s. zB [Jackson, §16]

$$\frac{e^{ik|\vec r - \vec r'|}}{4\pi|\vec r - \vec r'|} \overset{r'<r}{=} ik \sum_{\ell=0}^{\infty} j_\ell(kr')\, h_\ell^{(1)}(kr) \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\theta', \varphi')\, Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

((sphärische Bessel-Funktionen))

(vgl. S. 105/106)

Bsp: Dipolstrahlung (E1-Strahlung, Hertz'scher Dipol)

$\equiv \vec{a}_1$ - Anteil

betrachte $\int d^3r\, \vec{j}_0(\vec{r}) = \int d^3r\, (\vec{j}_0 \cdot \vec{\nabla})\vec{r} \overset{\text{PI, Rand}}{=} - \int d^3r\, \vec{r}\, \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_0)}_{= \omega\rho}$ (s. S. 120)

$= -\omega \int d^3r\, \vec{r} \rho_0(\vec{r})$

$= -\omega \vec{p}_0$ $\quad \vec{p}_0$ = Dipolmoment (vgl §9.1, S.103)

$\Rightarrow \vec{A} = \overset{k}{\frac{\omega}{c}}\, \vec{p}_0\, \mathrm{Im}\left(e^{-i\omega t} \frac{e^{ikr}}{r}\right)$

$\Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \overset{\text{Näherung (III)}}{=} k\, \mathrm{Im}\left(\frac{e^{-i\omega t}}{r} \vec{\nabla} e^{ikr}\right) \times \vec{p}_0$

(Nabla in Kugelkoord.) $= \vec{e}_r \partial_r e^{ikr} = ik\vec{n}\, e^{ikr}$

$\mathrm{Im}(i[a+ib]) = a = \mathrm{Re}([a+ib])$

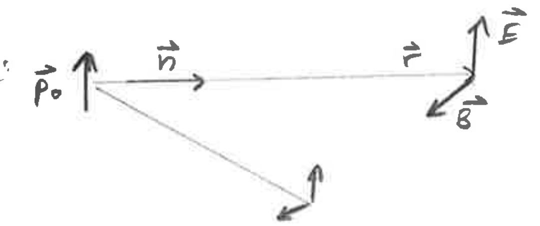
$= k^2\, \vec{n} \times \vec{p}_0\, \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\right) = k^2\, \vec{n} \times \vec{p}_0\, \frac{\cos(kr-\omega t)}{r}$

$\Rightarrow$ (Max 4): $\dot{\vec{E}} = c\, \vec{\nabla} \times \vec{B} - \cancel{4\pi \vec{j}}$ Fernzone

$\hookrightarrow$ in $\mathrm{Re}(..)$, $\vec{\nabla} \overset{(III)}{\to} ik\vec{n} = \frac{ik\vec{n}}{-i\omega} \partial_t$

$\Rightarrow \vec{E} = c\, \frac{k}{-\omega}\, \vec{n} \times \vec{B} = \vec{B} \times \vec{n}$

also:



Richtungen: wie ebene Welle (§7, S. 92)

Ampl $\sim 1/r$, weil Energie $\sim$ Feld^2 (vgl. §9.3, S. 114)

nichts wird in $\vec{p}_0$-Richtung abgestrahlt (wegen $\times$)

Bsp: M1- und E2-Strahlung

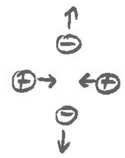
$\equiv \vec{a}_2$-Anteil

$$\vec{a}_2 = -ik\,\frac{e^{ikr}}{r^2}\int d^3r'\,(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')\,\vec{j}_0(\vec{r}\,')$$

ähnlich magn. Dipolmoment
vgl. §9.1, S. 107, Term 2
nun aber $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_0 = \omega\rho_0 \neq 0$

$$= c\,\vec{m}_0\times\vec{r} - \frac{\omega}{2}\int d^3r'\,\left[\vec{r}\,'(\vec{r}\,'\cdot\vec{r})\right]\rho_0(\vec{r}\,')$$

$$\left(\left(= \underbrace{c\,\vec{m}_0\times\vec{r}}_{\text{magn. Dipolstrahlung (M1)}} - \underbrace{\frac{\omega}{2}\,\frac{1}{3}\left(D\vec{r} + \left(\int d^3r'\,\vec{r}\,'^2\rho_0(\vec{r}\,')\right)\vec{r}\right)}_{\text{el. Quadrupolstrahlung (E2)}} \right)\right)$$



((mit magn. Dipolmoment $\vec{m}_0 \equiv \frac{1}{2c}\int d^3r\,\vec{r}\times\vec{j}_0(\vec{r})$, s. S. 108))

Bem: beide Anteile (M1), (E2) sind $\mathcal{O}(d/\lambda)\cdot$ (E1)

- Rückblick: statische Multipole : $\frac{1}{|r-r'|}$ entwickeln
  Strahlungs-Multipole : $e^{ik|r-r'|}$ entwickeln

- allg. Sender
  ist Superposition monochromatischer Sender
  evtl. Phasenverschoben, $\cos(\omega t) = \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ etc.
  $$\vec{j}(\vec{r},t) = \int\frac{d\omega}{2\pi}\,\tilde{\vec{j}}(\vec{r},\omega)\,e^{-i\omega t}$$