- "potentielle Energie" ist im Feld

→ will zeigen, dass $\underset{\text{fest}}{\oplus}$ $\quad \oplus\!\rightarrow$

zu entsprechender $\int d^3r\, U$ – Zunahme führt

betrachte allg. statische Ladungsverteilung $\rho(\vec r)$,

summiere über potentielle E (doppelte paarweise: $\sum_{i,j} V(\vec r_i - \vec r_j)$)

$$\frac{1}{2}\int d^3r \int d^3r'\, \frac{\rho(\vec r)\,\rho(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|} = \frac{1}{2}\int d^3r\, \rho(\vec r)\, \phi(\vec r) \qquad \text{((ret.) Pot, S. 95)}$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int d^3r\, \phi(\vec r)\, \vec\nabla\cdot\vec E \qquad \text{(Max1 benutzt)}$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\int d^3r\, \vec E\cdot\vec\nabla\phi \qquad \text{(PI, Randterm = 0)}$$

$$(\vec E = -\vec\nabla\phi - \cancel{\dot{\vec A}/c})$$

$$= \int d^3r\, \frac{1}{8\pi}\vec E^2$$

, vgl. U-Anteil ✓✓

- dasselbe für statische Stromverteilung $\vec j(\vec r)$

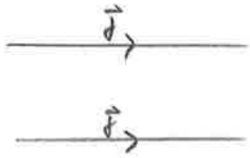
$$\int d^3r\, \frac{1}{8\pi}\vec B^2 = \frac{1}{8\pi}\int d^3r\, \vec B\cdot(\vec\nabla\times\vec A)$$

$$= \varepsilon^{ijk} B_i \partial_j A_k \overset{(PI)}{=} -\varepsilon^{ijk} B_i \partial_j A_k = +\varepsilon^{kji} A_k \partial_j B_i$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int d^3r\, \vec A\cdot(\vec\nabla\times\vec B)$$

$$= \frac{1}{2c}\int d^3r\, \vec A(\vec r)\cdot\vec j(\vec r) \qquad \text{(Max 4 benutzt, } \dot{\vec E} = 0\text{)}$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3r \int d^3r'\, \frac{\vec j(\vec r)\cdot\vec j(\vec r')}{c^2\,|\vec r - \vec r'|} \qquad \text{((ret.) Pot eingesetzt)}$$



ziehen sich an (Lorentzkraft!).

drücke Drähte (um da) auseinander

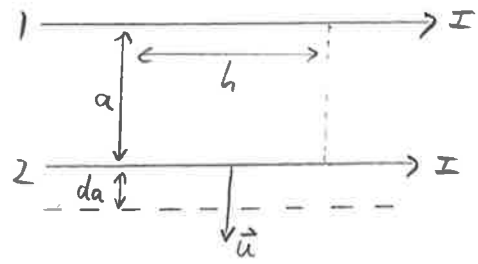
→ Arbeit (dE_1) wird am System verrichtet.

aber: $|\vec r - \vec r'|$ wird größer

$\rightsquigarrow \frac{1}{|\dots|}$ wird kleiner, RHS wird kleiner,

LHS $\sim \vec B^2 \in U$ wird kleiner !↯?

((• wie löst sich das Paradoxon auf S. 116 unten auf?



① q in Draht 2 erfährt Lorentzkraft $\vec F_L = q\frac{\vec v}{c}\times\vec B$

⇒ Drähte ziehen sich an.

⇝ beim Auseinanderdrücken (um da) wird Arbeit verrichtet;

wo steckt die entsprechende Energie dE?

(($dE = |\vec F|\cdot da$, $|\vec F| = q\frac{v}{c}B_1 \longrightarrow \frac{1}{c}\int j_2 B_1 = \frac{1}{c} h I B_1$

B-Feld um Draht, beim Abstand a:

$B_1 = \frac{2I}{ca}$, s. z.B. §6.3, S. 86

$= \frac{2I^2}{ca^2}\cdot h\cdot da$))

② aber in Feldenergie $U \sim \vec B^2 \sim \int \frac{\vec I\cdot\vec I}{|\vec r-\vec r'|}$ wird Nenner größer

⇒ $dE_{②} \sim \vec B^2 < 0$ (und sogar $= -dE$)

es gibt aber weitere Beiträge!

③ {während der Zeit $dt = \frac{da}{u}$, in der man den Draht 2 mit Geschwindigkeit $\vec u$ um da verschiebt}, wirkt auf q in Draht 2 eine zusätzliche Lorentzkraft $q\frac{\vec u}{c}\times\vec B$

⇒ $dE_{③} > 0$ (und sogar $= dE$)

④ {...}, ändert sich $\vec B$

⇝ $\vec\nabla\times\vec E \neq \vec 0$ (wegen Max2)

und $q\vec E$ beschleunigt Ladungen in Draht 1

⇒ $dE_{④} > 0$ (und sogar $= dE$)

$dE = -dE + dE + dE$, alles OK.))

→ sind *alle* Manipulationen an Max durchgespielt?

am Bsp (Max4): $\vec{\nabla}\cdot$ (Max4) $\Rightarrow$ Kontinuitätsgl. (§6.2, S. 79)

$\vec{\nabla}\times$ (Max4) $\Rightarrow$ Wellengl. (vgl. §7, S. 92)

$\vec{E}\cdot$ (Max4) $\Rightarrow$ En.-Konti. (§9.3, S. 113/114)

$\vec{B}\times$ (Max4) $\Rightarrow$?

$\vec{E}\times$ (Max2)

Feldimpuls

$$\vec{B}\times \quad \Big| \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \dot{\vec{E}}/c = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad \text{(Max4)}$$

$$\vec{E}\times \quad \Big| \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \dot{\vec{B}}/c = \vec{0} \qquad \text{(Max2)}, \text{ addiere}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{B}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}) - \frac{1}{c}\vec{B}\times\dot{\vec{E}}$$

$$+\vec{\nabla}(\vec{E}\cdot\vec{E}) - \vec{E}(\vec{E}\cdot\vec{\nabla}) + \frac{1}{c}\vec{E}\times\dot{\vec{B}} = \frac{4\pi}{c}\vec{B}\times\vec{j}$$

$$\Leftrightarrow \partial_t\left(\frac{1}{c}\vec{E}\times\vec{B}\right) + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2}\vec{B}^2\right) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}\times\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{E}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}$$

addiere diese Zeile ⟶ $+\vec{B}(\vec{\nabla}\vec{B}) + \vec{E}(\vec{\nabla}\vec{E} - 4\pi\varrho)$ $\quad \cdot\frac{1}{4\pi}$

(=0 wegen Max1, Max3)

$$\Leftrightarrow \partial_t\Big(\underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B}}_{=\vec{S}\text{, s. S. 114}}\Big) + \frac{1}{4\pi}\Big\{\vec{\nabla}\underbrace{\tfrac{1}{2}(\vec{E}^2+\vec{B}^2)}_{=4\pi u} - (\vec{E}\cdot\vec{\nabla})\vec{E} - \vec{E}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\Big\} =$$

$$= -\Big(\underbrace{\varrho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}/c}_{\equiv \vec{f}_L}\Big)$$

schreibe dies nun als (Vorzeichen sind Konvention)

$$\boxed{\partial_t \frac{\vec{S}}{c^2} - \vec{\nabla}\overleftrightarrow{T} = -\vec{f}_L}$$

(bzw. in Komponenten: $\partial_t \frac{S_j}{c^2} - \underbrace{\partial_i T_{ij}}_{\Sigma} = -f_{L_j}$)

es gilt
$$\{\ldots\}_j = \partial_j \tfrac{1}{2}(\vec{E}^2+\vec{B}^2) - E_i\partial_i E_j - E_j\partial_i E_i - B_i\partial_i B_j - B_j\partial_i B_i$$
$$= \partial_i\left[\delta_{ij}\tfrac{1}{2}(\vec{E}^2+\vec{B}^2) - E_iE_j - B_iB_j\right]$$
$$\equiv -4\pi\,\partial_i T_{ij}$$

↳ Maxwellscher Spannungstensor

⇒ s. Ü53

→ Gesamtimpuls-Erhaltung einer vollständigen (emm) Welt

Bem.: • lese dies wieder als "Kontinuitätsglg",
dann könnte man $\frac{\vec{S}}{c^2}$ = Impuls-Dichte
und T_{ij} = Impuls-Stromdichte nennen

• $\vec{f}_L$ auf der RHS ist die Lorentzkraftdichte;
beschreibt Zeitableitung der Impulsdichte der "geladenen Materie"

• es gilt $Sp(T) = \sum_{i=1}^{3} T_{ii} = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{3}{2}(\vec{E}^2+\vec{B}^2) - \vec{E}^2 - \vec{B}^2\right]$

$$= -\frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2+\vec{B}^2) = -u$$

$\Rightarrow u + Sp(T) = 0$

z.B. (Zitat) ebene Welle in x-Richtung $T = \begin{pmatrix} -u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Isotropes Licht $T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}u & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}u & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}u \end{pmatrix}$

• Licht-"Wucht" ist klein, da Impuls-Dichte = $\vec{S}/c^2$
(aber z.B. Sonnensegel als Antrieb ?)

• ein Volumen Feld hat also den
Impuls $\vec{P}_V = \int_V d^3r \, \frac{1}{4\pi c} \vec{E}\times\vec{B}$
und daher auch einen (Gesamt-)
Drehimpuls $\vec{L}_V = \int_V d^3r \, \vec{r}\times\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{4\pi c}$

((kann $\vec{L}_V$ auch sichtbar machen: "Feynman-Scheibe",
[The Feynman Lectures on Physics, Vol. 2, § 17.4]
B-Feld aus ⇝ Scheibe dreht!))