9.3 Feldenergie

(bzw.: "Energie im Feld")

⇝ falls in der emm Welt "Energie" erhalten ist,
dann folgt dies aus $(\text{Max}1), \ldots, (\text{Max}4)$, $(m\ddot{\vec r} = \vec F_L)$ ((s. Postkarte, S. 74))

Wunschvorstellung: ∂_t 

$= 0$

- Energie, was ist das? wie kam das ins Spiel?

  Bewegungsglg $\cdot$ (Unbekannte)$^{\text{ein • weniger}}$, $\partial_t(\text{////}^2) = \ldots$
  und sehe nach, ob $\ldots = \partial_t(\text{\\\\\\})$.

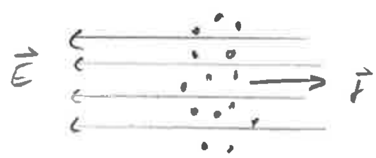
- Mechanik: $m\ddot{\vec r} = q\left(\vec E + \dot{\vec r} \times \vec B/c\right) \quad \Big| \cdot \dot{\vec r}$

$$\underbrace{\partial_t\left(\frac{m}{2}\vec v^{\,2}\right)}_{\equiv T} = \underbrace{q\,\vec v \cdot \vec E}_{\text{gegeben}} = \frac{\text{Kraft} \cdot \text{Weg}}{\text{Zeit}} \quad \left(\overset{?}{=} -\partial_t V(\vec r(t)) \quad \text{falls } q\vec E = -\vec\nabla V(\vec r) \right)$$

$$\left(\int d^3r\, \vec v \rho\right)$$

nun viele Teilchen in V mit mittl. Geschw. $\vec v(\vec r, t)$

$$\sum_V \frac{m}{2}\vec v^{\,2} \equiv T_V$$



hier: T_V nimmt ab

$$\partial_t T_V + \int_V d^3r\, \underbrace{\left(-\vec j \cdot \vec E\right)}_{\frac{\text{von den Teilchen verrichtete Arbeit}}{\text{Zeit} \cdot \text{Vol}}} = 0$$

- Elektromagnetik: nur $(\text{Max}2)$, $(\text{Max}4)$ sind Bewegungsgln.

$$-(\text{Max}4): \quad \dot{\vec E}/c - \vec\nabla \times \vec B = -\frac{4\pi}{c}\vec j \qquad \Big| \cdot \vec E$$

$$(\text{Max}2): \quad \dot{\vec B}/c + \vec\nabla \times \vec E = \vec 0 \qquad \Big| \cdot \vec B \quad \text{, addiere}$$

$$\underbrace{\frac{1}{c}\left(\vec E \cdot \dot{\vec E} + \vec B \cdot \dot{\vec B}\right)}_{①} + \underbrace{\vec B \cdot (\vec\nabla \times \vec E) - \vec E \cdot (\vec\nabla \times \vec B)}_{②} = -\frac{4\pi}{c}\vec j \cdot \vec E \qquad \Big| \cdot \frac{c}{4\pi}$$

$$① = \frac{1}{2}\partial_t(\vec{E}^2+\vec{B}^2)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) = \varepsilon^{ijk}\partial_i E_j B_k = B_k\,\varepsilon^{ijk}\partial_i E_j + E_j\,\varepsilon^{ijk}\partial_i B_k$$

$$= B_k\,\varepsilon^{kij}\partial_i E_j - E_j\,\varepsilon^{jik}\partial_i B_k$$

$$= \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = ②$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\partial_t \underbrace{\frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2+\vec{B}^2)}_{\equiv\, U} + \vec{\nabla}\cdot\underbrace{\frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B}}_{\equiv\, \vec{S}} = \underbrace{-\vec{j}\cdot\vec{E}}_{\frac{\text{Energie-Prod.}}{\text{Zeit}\cdot\text{Vol.}} = -(T_V)^{\cdot}}}$$

Poynting-Vektor

$$\Leftrightarrow \partial_t U + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = -\vec{j}\cdot\vec{E}$$ "Poynting-Theorem"

Bem.:
- dies ähnelt der Form der Kontinuitätsglg $\partial_t\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$ (vgl. §6.1, S.76)
- daher könnte man auch von "Energie-Kontinuitätsglg." sprechen
- dann wäre U = Energie-Dichte eines felderfüllten Raumes
  $\vec{S}$ = Energie-Stromdichte ✓.

- invar. unter $U \to U + U_0(\vec{r})$, $\vec{S} \to \vec{S} + \vec{\nabla}\times\vec{C}$
  $U_0, \vec{C}$ nicht beobachtbar (an keiner Physik beteiligt)
  $U_0, \vec{C}$ würden auch bei feldfreiem Raum vorhanden sein
  $U_0 = 0$, $\vec{C} = \vec{0}$ ist einfachste Wahl

→ Interpretation der RHS?
betrachte $\int_V d^3r\ \boxed{\text{E-Konti.}}$, V zeitunabh.

$$\partial_t \int_V d^3r\, U + \underbrace{\int_V d^3r\, \vec{\nabla}\cdot\vec{S}}_{\overset{\text{(S v Gauss)}}{=} \oint_{\partial V} d\vec{f}\cdot\vec{S}} = \underbrace{\int_V d^3r\,(-\vec{j}\cdot\vec{E})}_{= -\partial_t T_V}$$

s. S. 113

$= 0$ falls $\vec{S} = \vec{0}$ auf Oberfläche falls also $\vec{E}, \vec{B}, \rho, \vec{j}$ ganz in V sind:

$$\Leftrightarrow \quad \partial_t \left(\int_V d^3r\, U + T_V \right) = 0$$

Bem.: • erstmals eine Gesamtenergieerhaltung in einer vollständigen Theorie erhalten.

Bsp (harmonische ebene em Welle; vgl. §7, S. 92)

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \quad , \quad \vec{B} = \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E} \quad , \quad \vec{E}_0 \perp \vec{k} \quad , \quad \omega = ck \ (\text{Vac})$$

$$\Rightarrow U = 2 \, \frac{1}{8\pi} E_0^2 \cos^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \frac{\vec{k}}{k} E_0^2 \cos^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$$

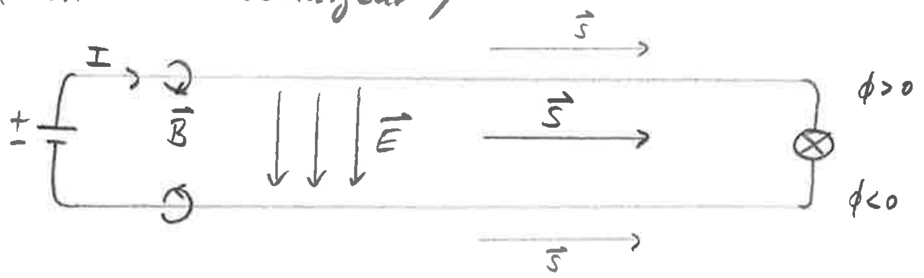
$$\Rightarrow \partial_t U + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \frac{E_0^2}{4\pi} \Big\{ -2\underbrace{\omega}_{=ck} \cos \cdot \sin + \frac{c}{k} 2k^2 \cos \cdot \sin \Big\}$$

$$= 0 \quad , \quad \text{Kontinuitätsglg} \ ✓$$

(da alle Energie-Anteile mit c fliegen, müsste "$\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$" gelten: $\vec{S} \stackrel{?}{=} U c \frac{\vec{k}}{k}$, ja.)

Bsp Energie-Übertragung zum Verbraucher

($E_{kin}(e^-)$ vernachlässigbar)



Bem.: • die $\int_V$ $\boxed{\text{E-Konti}}$ auf S. 114 unten interpretieren wir so:

die Energie U der em Felder kann sich dadurch ändern, dass Energie auf die geladenen Teilchen übertragen wird (RHS) oder dass ein Energie durch die Oberfläche verloren geht (LHS_2).