9.2 Liénard-Wiechert Potentiale

→ "erster Blick" auf $t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$ in ret. Pot.

→ typische Anwendung: eine / mehrere bewegte Punktladungen

⇒ z.B. "Synchrotronstrahlung" (s. unten, §9.4)
(ultrarelativistische) e^- in $\vec{B}$-Feld
z.B. in Beschleunigern / Plasmen / Astrophysik
emittierte Strahlung ist wichtige Lichtquelle
für z.B. Festkörperphysik, Biologie

betrachte eine Punktladung (q) auf Bahn $\vec{r}_0(t)$

⇒ Ladungsdichte
Stromdichte : $\begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} = cq\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\beta}(t) \end{pmatrix}$
(s. §6.1, S. 76)

$\vec{\beta}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{c} = \frac{\dot{\vec{r}}_0(t)}{c}$

⇒ retardierte Potentiale : $\begin{pmatrix} \phi(\vec{r},t) \\ \vec{A}(\vec{r},t) \end{pmatrix} = q \int \frac{d^3 r'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, \delta\!\left(\vec{r}' - \vec{r}_0\!\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\beta}\!\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right) \end{pmatrix}$
(s. §8, S. 95)

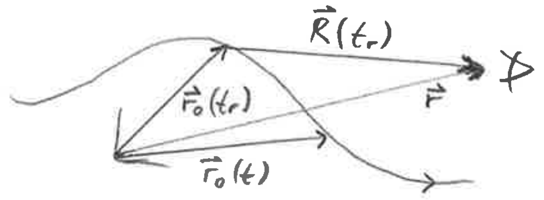
Bem.:
- $\vec{r}, t$ sind hier fest
- $\vec{r}'$ sucht Raum ab und findet δ-Zacke bei $\vec{r}' = \vec{r}_1$:
  $\vec{r}_1 - \vec{r}_0\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_1|}{c}\right) = 0$
- $\vec{r}_1$ ist ein spezielles $\vec{r}_0(\ldots)$, $\vec{r}_1 \equiv \vec{r}_0(t_r)$

$\Rightarrow \vec{r}_0(t_r) - \vec{r}_0\left(t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}_0(t_r)|\right) = 0$

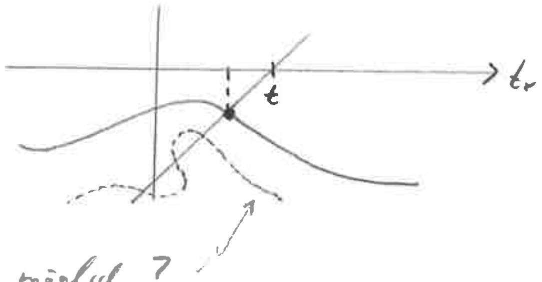
$\Rightarrow t_r = t - \frac{1}{c}\underbrace{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_r)|}_{\equiv |\vec{R}(t_r)| = R(t_r)}$ retardierte Zeit

(die frühere Zeit, zu der die t-Beobachtung verursacht wurde)

- Momentaufnahme (zur Zeit t)



- $t_r - t = -\frac{1}{c} R(t_r)$ graphisch lösen



((mehr als eine Lsg möglich ?
dann müsste irgendwo der Anstieg >1 sein,

$$\partial_{t_r}\left(-\tfrac{1}{c} R(t_r)\right) = -\frac{1}{c}\frac{1}{2R(t_r)}\, 2\vec{R}(t_r)\left(-\dot{\vec{r}}_0(t_r)\right) = \frac{\vec{R}}{R}\cdot\vec{\beta}(t_r)$$

< 1 falls $|\vec{\beta}| < 1$: nichts schneller als c ; nein))

müssen nun das Integral auswerten:

$\vec{r}\,'$ nahe $\vec{r}_1$: $\vec{r}\,' = \vec{r}_1 + \vec{\varepsilon}$, $d^3 r' = d^3\varepsilon$

$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = |\vec{r}-\vec{r}_1-\vec{\varepsilon}| = |\vec{R}-\vec{\varepsilon}|$, $\vec{R} = \vec{R}(t_r)$

$$\delta\text{-Inhalt} \equiv \vec{\xi} = \vec{r}_1 + \vec{\varepsilon} - \vec{r}_0\left(t - \tfrac{1}{c}\underbrace{|\vec{R}-\vec{\varepsilon}|}_{=\sqrt{\vec{R}^2+\vec{\varepsilon}^2-2\vec{R}\cdot\vec{\varepsilon}}\,=\,R\left(1-\frac{2\vec{R}\vec{\varepsilon}}{R^2}+\frac{\vec{\varepsilon}^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}\,\approx\, R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{\varepsilon}}{R} + O(\varepsilon^2)}\right)$$

(Taylorentw. von $\vec{r}_0$)

$$= \cancel{\vec{r}_1} + \vec{\varepsilon} - \cancel{\vec{r}_0\left(t - \tfrac{R}{c}\right)} - \dot{\vec{r}}_0(t_r)\,\frac{1}{c}\,\frac{\vec{R}\cdot\vec{\varepsilon}}{R} + O(\varepsilon^2)$$

$$= \vec{\varepsilon} - \vec{\beta}\,\varepsilon_{\parallel} \qquad \text{mit} \qquad \varepsilon_{\parallel} \equiv \frac{\vec{R}}{R}\cdot\vec{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \delta(\vec{\xi}) = \delta(\xi_{\parallel})\,\delta^{(2)}(\vec{\xi}_{\perp}) \qquad \text{(kartesisch in } \vec{R}\text{-Richtung gedacht)}$$

$$= \delta\left(\varepsilon_{\parallel}\left[1-\tfrac{\vec{R}}{R}\vec{\beta}\right]\right)\,\delta^{(2)}\left(\vec{\varepsilon}_{\perp} - \cancel{\vec{\beta}_{\perp}\varepsilon_{\parallel}}\right) \quad {=}0 \text{ wegen erster } \delta\text{-Fkt}$$

$$= \frac{1}{[1-\beta_{\parallel}]}\,\delta^{(3)}(\vec{\varepsilon})$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \phi(\vec{r},t) \\ \vec{A}(\vec{r},t) \end{pmatrix} = \frac{q}{R - \vec{\beta}\cdot\vec{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\beta} \end{pmatrix}$$

(bei t_r)

insgesamt also:

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = q \int d^3 r' \, \frac{1}{|\;|} \, \underbrace{\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0(t - \tfrac{|\;|}{c}))}_{\text{um } \vec{0} \text{ entwickeln}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\beta}(t - \frac{|\;|}{c}) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{q}{R - \vec{R}\vec{\beta}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\beta} \end{pmatrix} \Bigg|_{t_r} , \quad \text{wobei} \quad \begin{array}{l} \vec{R}(t) \equiv \vec{r} - \vec{r}_0(t) \\ t_r \equiv t - \frac{1}{c} R(t_r) \end{array}$$

Bem:
- für bewegte Ladungen gilt Coulomb nicht mehr
- Felder zu $\begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$ ausrechnen ? s. §9.5

Bsp (Punktladung mit konstanter Geschwindigkeit)

sei $\vec{r}_0(t) = \vec{e}_1 v t$

$\Rightarrow \vec{\beta}(t) = \vec{e}_1 \frac{v}{c}$, $\vec{R}(t) = \vec{r} - \vec{e}_1 v t = \begin{pmatrix} x - vt \\ y \\ z \end{pmatrix}$

bestimme retardierte Zeit:

$t_r = t - \frac{1}{c}\sqrt{(x - v t_r)^2 + \rho^2}$ $\quad (\rho^2 = y^2 + z^2)$

$\ldots \Leftrightarrow (1-\beta^2)(x - v t_r) = x - vt + \beta\sqrt{(x-vt)^2 + (1-\beta^2)\rho^2}$

((nur eine Lsg, da $t_r \overset{!}{<} t$))

$$\Rightarrow R - \vec{\beta}\cdot\vec{R} = c(t - t_r) - \beta(x - v t_r)$$
$$= \frac{1}{\beta}\left[(1-\beta^2)(x - v t_r) - x + vt\right]$$
$$= \sqrt{\;\;} = \sqrt{1-\beta^2}\sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}(x-vt)^2 + \rho^2}$$

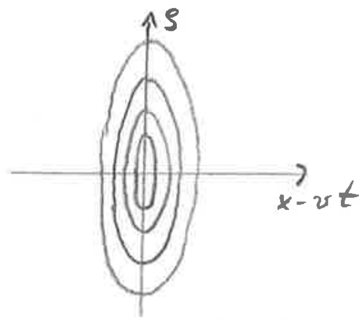
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \phi \\ A_1 \end{pmatrix} = \frac{q\gamma}{\sqrt{\gamma^2(x-vt)^2 + \rho^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} , \quad \text{wobei} \quad \begin{array}{l} \vec{A} = A_1 \vec{e}_1 \\ \beta = v/c \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \geq 1 \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ Äqui-ϕ-Flächen, $\phi = \text{const.}$:

$$\frac{(x-vt)^2}{1-\beta^2} + \rho^2 = \text{const.}$$

sind Ellipsen, $\frac{x^2}{a^2} \ldots$, $a < 1$

(Coulomb wären Kreise)



x-Skala verkürzt: Längenkontraktion

$\Rightarrow$ Fazit: Max $\rightarrow$ Rel.-Theorie !