z.B. mit Mathematica kann man die Y_{lm} erkunden:

((spielen auch wichtige Rolle in QM: z.B. H-Atom))

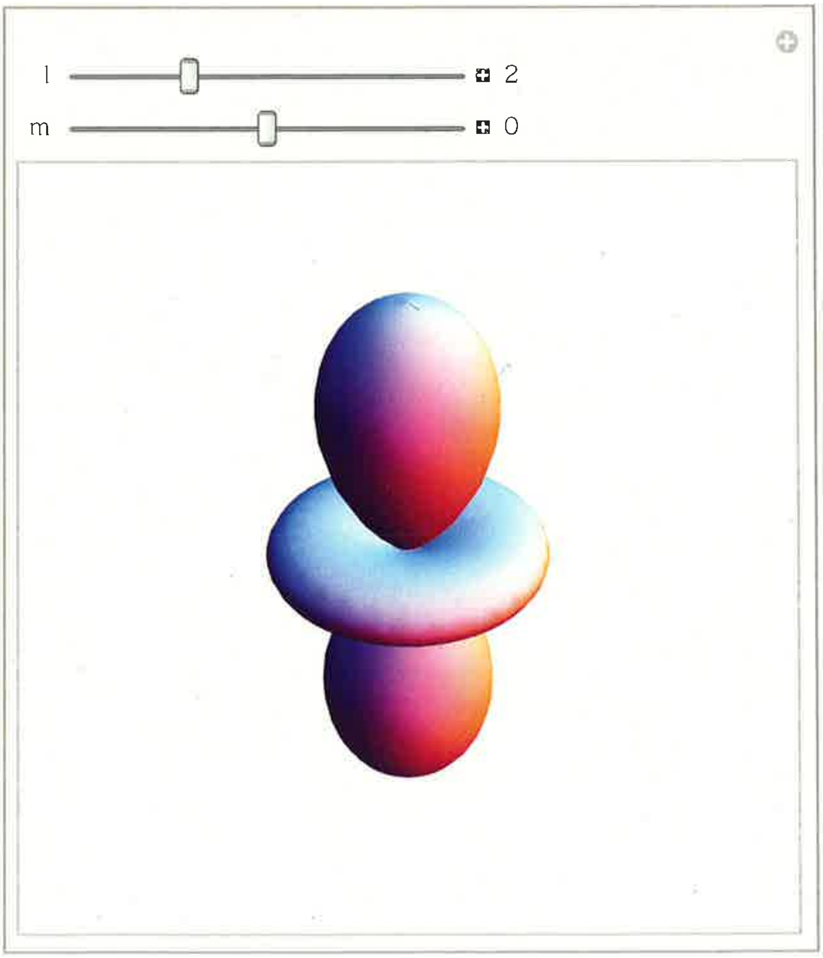
▪ Kugelflaechenfunktionen Y_lm - Visualisierung

```
In[1]:= (*basic Mathematica command for Y_lm(theta,phi)*)
        SphericalHarmonicY[2, 0, th, phi]
```

Out[1]= $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\left(-1+3\,\mathrm{Cos}[\mathrm{th}]^2\right) = Y_{20}(th, phi)$

```
In[6]:= (*Visualisierung*)
        Manipulate[SphericalPlot3D[Abs[SphericalHarmonicY[l, m, th, phi]], {th, 0, Pi},
          {phi, 0, 2 Pi}, Mesh → False, Axes → False, SphericalRegion → True, Boxed → False],
         {{l, 2, "l"}, 0, 7, 1, Appearance → "Labeled"},
         {{m, 0, "m"}, -1, 1, 1, Appearance → "Labeled"}]
```

Out[6]=



Insbesondere
$$\frac{1}{|\vec r-\vec r'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\,\frac{|\vec r'|^{l}}{|\vec r|^{l+1}}\,Y^*_{lm}(\theta',\varphi')\,Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

"perfekte Separation", [Jackson (3.70)]

⇒ Multipolentwicklung:
$$\phi(\vec r) = \int_V \frac{d^3\vec r'\,\rho(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\;q_{lm}\,\frac{Y_{lm}(\theta,\varphi)}{r^{l+1}}$$

(für $|\vec r| \gg \max_{\vec x'\in V}|\vec r'|$)

mit $q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int d^3\vec r'\,|\vec r'|^{l}\,Y^*_{lm}(\theta',\varphi')\,\rho(\vec r')$

• betrachte nun das (statische) Vektorpotential

((Magnetostatik; $\rho = 0$, $\vec{j}$ im Endlichen (z.B. in V), $r = |\vec r| \to \infty$))

$$\vec A(\vec r) = \frac{1}{c}\int \frac{d^3r'\ \vec j(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|} \qquad \vec r = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad \vec r\,' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

$$\overset{!}{=} \frac{1}{cr}\underbrace{\int d^3r'\ \vec j(\vec r')}_{①} + \sum_{j=1}^{3} \frac{x_j}{cr^3}\underbrace{\int d^3r'\ x_j'\ \vec j(\vec r')}_{②} + \mathcal{O}\left(\tfrac{1}{r^3}\right)$$

① nach denken: $\cancel{\dot\rho} + \vec\nabla\cdot\vec j = 0$ (Kontinuitätsgl.) $\rightsquigarrow$ $\vec j$ hat keine Quellen
Stromlinien geschlossen

$\Rightarrow$ Mittelwert $= 0$

per Rechnung: wähle V groß genug, so daß $\vec j(\vec r)\big|_{\vec r \in \partial V} = \vec 0$

$$\Rightarrow\ 0 = \int_{\partial V} d\vec f \cdot \vec j(\vec r)\ f(\vec r) \qquad \text{für } \underline{\text{beliebiges}}\ f(\vec r)$$

(S. v. Gauss) $\rightsquigarrow$
$$= \int_V d^3r\ \vec\nabla\cdot\left(\vec j(\vec r) f(\vec r)\right)$$
$$= \int_V d^3r \left\{ \underbrace{(\vec\nabla\cdot\vec j)}_{=0,\ \text{Konti. s.o.}} f + \vec j\cdot\vec\nabla f \right\} = \int_V d^3r\ \vec j(\vec r)\cdot\vec\nabla f(\vec r)$$

wähle jetzt z.B. $f(\vec r) = x_1$ $\Rightarrow$ $0 = \int_V d^3r\ \vec j(\vec r)\cdot\vec e_1 = \int_V d^3r\ j_1(\vec r)$

(analog für $f = x_2$, $f = x_3$)

$$\Rightarrow \text{ insgesamt also } ① = \int_V d^3r\ \vec j(\vec r) = 0$$

„es gibt keine magnetischen Monopole"

② wähle nun $f(\vec r) = x_k x_j$

$$\Rightarrow \vec j\cdot\vec\nabla f(\vec r) = \sum_{i=1}^{3} j_i \partial_i x_k x_j = \sum_i j_i\left(\delta_{ik} x_j + \delta_{ij} x_k\right) = j_k x_j + j_j x_k$$

$$\Rightarrow ② = \int_V d^3r\ x_j \vec j(\vec r) = \sum_{k=1}^{3} \vec e_k \int_V d^3r\ \underline{j_k x_j} \qquad j_k x_j = \tfrac{1}{2}\{ j_k x_j + \underbrace{\vec j\cdot\vec\nabla f}_{\rightsquigarrow 0} - j_j x_k \}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \frac{\vec e_k}{2} \int_V d^3r \left\{ j_k(\vec r)\, x_j - j_j(\vec r)\, x_k \right\}$$

es gilt $\{\dots\} = \left(\delta_{km}\delta_{jn} - \delta_{jm}\delta_{kn}\right) j_m x_n \qquad \left(\sum_{m,n=1}^{3}\right)$

$$= \varepsilon^{ikj}\,\varepsilon^{imn}\, j_m x_n$$

$$= \varepsilon^{ikj}\,(\vec{j}\times\vec{r})_i = \varepsilon^{kij}\,(\vec{r}\times\vec{j})_i$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{cr}\cdot\vec{0} + \sum_{j=1}^{3}\frac{x_j}{cr^3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\vec{e}_k}{2}\int_V d^3\vec{r}\,'\sum_{i=1}^{3}\varepsilon^{kij}\left(\vec{r}\,'\times\vec{j}(\vec{r}\,')\right)_i + \dots$$

$$= \boxed{\frac{1}{2c}\int_V d^3\vec{r}\,'\left(\vec{r}\,'\times\vec{j}(\vec{r}\,')\right)}\times\frac{\vec{r}}{r^3} + \mathcal{O}\left(1/r^3\right)$$

$= \vec{m}$ magnetisches Dipolmoment $\Rightarrow$ siehe Ü48

daraus folgt

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^{3}\vec{e}_k\,\varepsilon^{kij}\,\partial_i \underbrace{A_j}_{=\,\varepsilon^{jln}\, m_l \frac{x_n}{r^3}}$$

$$= \sum_k \vec{e}_k\left(\delta_{kl}\delta_{in} - \delta_{kn}\delta_{il}\right) m_l\, \underbrace{\partial_i \frac{x_n}{r^3}}_{=\,\frac{\delta_{in}}{r^3} - x_n\frac{3x_i}{r^5}}$$

$$= \sum_k \vec{e}_k\left(\cancel{\frac{3}{r^3}m_k} - \frac{1}{r^3}m_k - \cancel{m_k\frac{3r^2}{r^5}} + \frac{3}{r^5}x_k\,\vec{m}\cdot\vec{r}\right)$$

$$= \frac{1}{r^5}\left(3\vec{r}(\vec{m}\cdot\vec{r}) - r^2\vec{m}\right)$$

Bem.: vgl. dies mit elektrischem Dipolfeld:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi - \cancel{\dot{\vec{A}}/c} \quad \text{statisch}$$

el. Dipolmoment

$$= -\vec{\nabla}\left(\frac{Q}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} + \frac{\vec{r}\,\overleftrightarrow{Q}\,\vec{r}}{2r^5} + \dots\right)$$

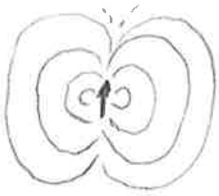
$$\ni -\vec{\nabla}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} = -\partial_i\frac{x_j p_j}{r^3}\vec{e}_i = \left(-\frac{\delta_{ij}p_j}{r^3} + \frac{3}{\cancel{2}}\frac{x_j p_j \cancel{2} x_i}{r^5}\right)\vec{e}_i$$

$$= \frac{1}{r^5}\left(3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r}) - r^2\vec{p}\right)$$

Bsp. Dipol-Felder zu $\vec{p} = p\vec{e}_3$, $\vec{m} = m\vec{e}_3$:

(z.B. um z-Achse rotierende homogen (Oberfl.-) gel. Kugel)

$$\begin{pmatrix}\vec{E}(\vec{r})\\ \vec{B}(\vec{r})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\\ \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p\\ m\end{pmatrix}\frac{3z\vec{r} - r^2\vec{e}_3}{r^5}$$



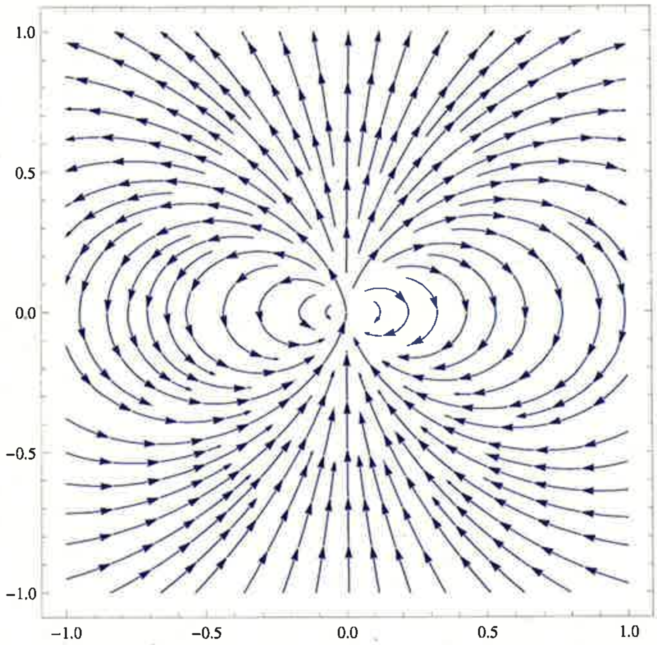
z. B. mit Mathematica:

Visualisierung der Dipolfelder von S. 108 unten

Dipol-Felder

In[1]:=
```
(*Vorl Seite 108 unten: Dipol auf z-Achse, Plot zB in x-z Ebene (y=0)*)
StreamPlot[{3 z x, 3 z z - (x^2 + z^2)} / (x^2 + z^2)^(5/2), {x, -1, 1}, {z, -1, 1}]
```

Out[1]=



Kräfte auf Dipole

→ Lorentzkraft (vgl. §6, S. 74)

$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{1}{c} q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\to \int \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \int \vec{j} \times \vec{B}$$