lese nun die $\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}$ – Entwicklung als Summe der Produkte ⇒ alles $\vec r$-Abhängige vors Integral (in $\phi = \int' \ldots$ etc).

$$\frac{1}{|\vec r-\vec r'|} = \frac{1}{r} + \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i}{r^3} x_i' + \sum_{jk}^{3} \frac{1}{2r^5}\left(x_j x_k - \frac{1}{3} r^2 \delta_{jk}\right) 3 x_j' x_k' + O(1/r^4)$$

$$= \frac{1}{r} + \sum_i \frac{x_i}{r^3} x_i' + \sum_{jk} \frac{1}{2r^5}\left(x_j x_k - \frac{1}{3} r^2 \delta_{jk}\right)\left(3 x_j' x_k' - r'^2 \delta_{jk}\right) + O(1/r^4)$$

erlaubt, da 0 unter $\sum_{jk}$ ($\delta_{jj} = 3$)

- das (statische) Skalarpotential ist dann

$$\phi(\vec r) = \frac{1}{c} \int_V \frac{d^3 \vec r' \, c \rho(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}$$

$$= \frac{1}{r} \underbrace{\int_V d^3 \vec r' \rho(\vec r')}_{\equiv Q \text{, Gesamtladung}} + \frac{\vec r}{r^3} \cdot \underbrace{\int_V d^3 \vec r' \, \vec r' \rho(\vec r')}_{\equiv \vec p \text{, (el.) Dipolmoment}} +$$

(ähnlich Schwerpkt.)

$$+ \frac{1}{2r^5} \sum_{jk} \left(x_j x_k - \frac{1}{3} r^2 \delta_{jk}\right) \underbrace{\int d^3 \vec r' \left(3 x_j' x_k' - r'^2 \delta_{jk}\right) \rho(\vec r')}_{\equiv Q_{jk} \text{, Quadrupoltensor}} + O(1/r^4)$$

(ähnlich Trägheitstensor)

könnte man weglassen (da $Sp(Q) = 0$)

Bem: • $\sum_{jk} x_j x_k Q_{jk} = \vec r \cdot Q \vec r$

• Q_{jk} – Eigenschaften: spurlos $\sum_{i=1}^{3} Q_{ii} = 0$

symmetrisch $Q_{ij} = Q_{ji}$ ($Q = Q^T$)

⇒ ∃ Hauptachsen, Eigenwerte $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$

falls Symm-Achse: $Q_1 = Q_2 = -\frac{1}{2} Q_3$

Bsp (geladene Kugeloberfläche) $\rho(\vec r) \equiv \delta(r-R)\, \sigma_0 \sin^2\theta$

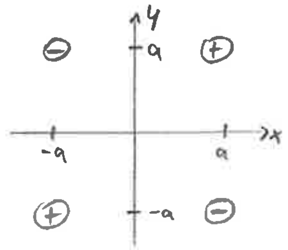
const.

$$\Rightarrow Q = \sigma_0 \, 2\pi \, R^2 \underbrace{\int_{-1}^{1} du\, (1-u^2)}_{= 4/3}$$

(Kugelkoord, $u = -\cos\theta$)

$$\Rightarrow \vec p = \vec 0 \quad \text{wegen} \quad \rho(\vec r) = \rho(-\vec r)$$

Bsp (4 Punktladungen q)



$$\rho(\vec r\,') = q\Big[\delta\Big(\vec r\,' - \begin{pmatrix}a\\a\\0\end{pmatrix}\Big) - \delta\Big(\vec r\,' - \begin{pmatrix}a\\-a\\0\end{pmatrix}\Big) + \delta\Big(\vec r\,' + \begin{pmatrix}a\\a\\0\end{pmatrix}\Big) - \delta\Big(\vec r\,' + \begin{pmatrix}a\\-a\\0\end{pmatrix}\Big)\Big]$$

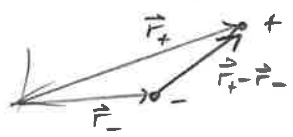
$$Q = q - q + q - q = 0$$

$\vec p = \vec 0$ wegen $\rho(\vec r\,') = \rho(-\vec r\,')$

$$(Q_{ij}) = qa^2\Big[\Big(3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}_j\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}_k - \cancel{2\delta_{jk}}\Big) - \Big(3\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}_j\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}_k - \cancel{2\delta_{jk}}\Big) + \Big(3\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}_j\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}_k - \cancel{2\delta_{jk}}\Big) - \Big(3\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}_j\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}_k - \cancel{2\delta_{jk}}\Big)\Big]$$

$$= 12\,qa^2\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Bsp (Dipol) q bei $\vec r_+$, $-q$ bei $\vec r_-$



$$\rho(\vec r\,') = q\big[\delta(\vec r\,' - \vec r_+) - \delta(\vec r\,' - \vec r_-)\big]$$

$$Q = q - q = 0$$

$$\vec p = q(\vec r_+ - \vec r_-)$$

((allg.: bei $Q = 0$ sieht man aus großer Entfernung nur noch das ϕ eines Dipols – egal wie wild die Ladungsvert.))

Bsp (kugelsymm. Ladungsdichte) $\rho(\vec r\,') = \rho(|\vec r\,'|)$

$$Q = \int \rho \neq 0$$

$$\vec p = \int_V d^3\vec r\,'\ \vec r\,'\rho(|\vec r\,'|) = \int_V d^3\vec r\,'\ \tfrac12\Big[\vec r\,'\rho(|\vec r\,'|) + \underbrace{\vec r\,'\rho(|\vec r\,'|)}_{\text{Subst. } \vec r\,' \to -\vec r\,'}\Big] = \vec 0$$

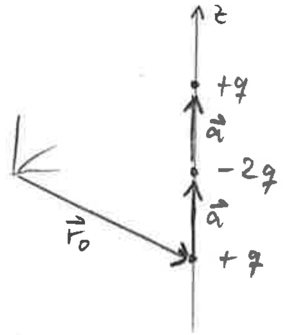
$$Q_{j\neq k} = \int_V d^3\vec r\,'\ 3x_j'x_k'\rho(|\vec r\,'|) = \int_V d^3\vec r\,'\ x_j'\ \tfrac12\Big[x_k'\rho(|\vec r\,'|) + \underbrace{x_k'\rho(|\vec r\,'|)}_{\text{Subst. } x_k' \to -x_k'}\Big] = 0$$

$\Rightarrow$ Q_{jk} ist diagonal.

aus Symmetriegründen gilt $Q_{11} = Q_{22} = Q_{33}$

aber Spur $= Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{ij} = 0$ (!)

<u>Bsp</u> (3 Punktladungen auf Achse ≡ z-Achse)



$$Q = q - 2q + q = 0$$

$$\vec{p} = q\left[\vec{r}_0 - 2(\vec{r}_0 + \vec{a}) + (\vec{r}_0 + 2\vec{a})\right] = \vec{0}$$

aus Symmetriegründen Q_{jk} diagonal

sowie $Q_{11} = Q_{22}$

wegen Spur $Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{11} = Q_{22} = -\frac{1}{2} Q_{33}$

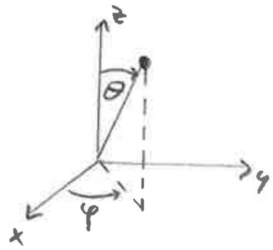
$$Q_{33} = \int d^3 r' \left(3z^2 - |\vec{r}'|^2\right) \rho(\vec{r}')$$

$$= \int d^3 r' \left(2z^2 - \underbrace{x^2 - y^2}_{\text{proportional zu } q - 2q + q = 0}\right) \rho(\vec{r}')$$

$$= 2q\left(z_0^2 - 2(z_0 + a)^2 + (z_0 + 2a)^2\right) = 4qa^2$$

→ oben (S. 103) hatten wir <u>kartesische Multipolmomente</u> definiert; man kann auch die <u>Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten</u> durchführen, vgl. z.B. [Jackson, §3, s. Formel (3.70)].

Hier: Hauptergebnisse (ohne Herleitung)



<u>Kugelkoord.</u>, Winkel $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

<u>Kugelflächenfunktionen</u> $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$

$\ell = 0, 1, 2, \ldots$; $m = -\ell, \ldots, \ell$

bilden eine <u>vollständige</u> Menge von <u>orthonormierten</u> Funktionen

d.h. $\int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \; Y^*_{\ell m}(\theta,\varphi)\, Y_{\ell' m'}(\theta,\varphi) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$

d.h. <u>jede</u> (diffbare, ..) Fkt $f(\theta, \varphi)$ als $f(\theta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \boxed{a_{\ell m}}\, Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ darstellbar.

$$a_{\ell m} = \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \; Y^*_{\ell m}(\theta, \varphi)\, f(\theta, \varphi)$$

(Mathematica: SphericalHarmonicY[ℓ, m, θ, φ])

<u>Beispiele</u>

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta, \quad Y_{1\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta\, e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right), \; \ldots$$