(D) $\widetilde{\text{Max}}$ via F.T.

Vorsichtsmaßnahme: $\vec{j} \to \vec{j} + \sigma \vec{E}$

mit $\sigma = 0^+$ ("infinit. Leitfähigkeit des Univ.")

$\widetilde{\text{Max}}$: 1 2 / 3 4

$$i\vec{k}\cdot\vec{\tilde{E}} = 4\pi\tilde{\rho} \qquad i\vec{k}\times\vec{\tilde{E}} - \frac{i\omega}{c}\vec{\tilde{B}} = \vec{0}$$

$$i\vec{k}\cdot\vec{\tilde{B}} = 0 \qquad i\vec{k}\times\vec{\tilde{B}} + \frac{i\omega}{c}\vec{\tilde{E}} = \frac{4\pi}{c}(\vec{\tilde{j}} + \sigma\vec{\tilde{E}})$$

Lsg: ((analog zu "$\vec{B}$ eliminieren" für Max ⇒ Wellenglg, vgl §7, S. 92))

- $i\vec{k}\times(\widetilde{\text{Max}}2)$; bac-cab; $(\widetilde{\text{Max}}1)$ ausnutzen; $(\widetilde{\text{Max}}4)$ einsetzen:

$$i\vec{k}\times(i\vec{k}\times\vec{\tilde{E}}) = i\vec{k}(i\vec{k}\cdot\vec{\tilde{E}}) + \vec{k}^2\vec{\tilde{E}} = i\vec{k}\,4\pi\tilde{\rho} + \vec{k}^2\vec{\tilde{E}} =$$

$$= \frac{i\omega}{c} i\vec{k}\times\vec{\tilde{B}} = \frac{i\omega}{c}\left(-\frac{i\omega}{c}\right)\vec{\tilde{E}} + \frac{i\omega}{c}\frac{4\pi}{c}(\vec{\tilde{j}} + \sigma\vec{\tilde{E}})$$

$$\Leftrightarrow \vec{\tilde{E}}\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{i\omega}{c}\frac{4\pi}{c}\sigma\right] = -i\vec{k}\,4\pi\tilde{\rho} + \frac{i\omega}{c}\frac{4\pi}{c}\vec{\tilde{j}}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\tilde{E}} = -i\vec{k}\underbrace{\boxed{\frac{4\pi\tilde{\rho}}{[\ldots]}}}_{\equiv\tilde{\phi}} + \frac{i\omega}{c}\underbrace{\boxed{\frac{4\pi\vec{\tilde{j}}}{c[\ldots]}}}_{\equiv\vec{\tilde{A}}}$$

(vgl. [...] aus (C), S. 98, mit $\frac{2\gamma}{c} \to \frac{4\pi\sigma}{c^2}$)

- analog: $i\vec{k}\times(\widetilde{\text{Max}}4)$; bac-cab; $(\widetilde{\text{Max}}3)$ ausnutzen; $(\widetilde{\text{Max}}2)$ einsetzen:

$$i\vec{k}\times(i\vec{k}\times\vec{\tilde{B}}) = i\vec{k}\underbrace{\cancel{(i\vec{k}\cdot\vec{\tilde{B}})}}^{\text{Max}3} + k^2\vec{\tilde{B}} = -\frac{i\omega}{c}i\vec{k}\times\vec{\tilde{E}} + \frac{4\pi}{c}(i\vec{k}\times\vec{\tilde{j}} + \sigma\, i\vec{k}\times\vec{\tilde{E}}) =$$

$$= \frac{4\pi}{c}i\vec{k}\times\vec{\tilde{j}} + \left(-\frac{i\omega}{c} + \frac{4\pi}{c}\sigma\right)\frac{i\omega}{c}\vec{\tilde{B}}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\tilde{B}} = i\vec{k}\times\underbrace{\boxed{\frac{4\pi\vec{\tilde{j}}}{c[\ldots]}}}_{=\vec{\tilde{A}}}$$

Rücktrafo

⇒ also $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}$, $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

brauchen noch Rücktrafo von $\tilde{\phi}, \vec{\tilde{A}} \to \phi, \vec{A}$,

siehe Weg (C) mit $\frac{2\gamma}{c} = \frac{4\pi\sigma}{c^2}$ ⇒ ret. Pot. ✓

9. Wichtige Anwendungen

... der (retardierten) Potentiale aus §8

$\rightsquigarrow$ weiterhin: "enge" ED; $\rho(\vec{r},t)$ und $\vec{j}(\vec{r},t)$ vorgegeben

9.1 Statik, Multipole

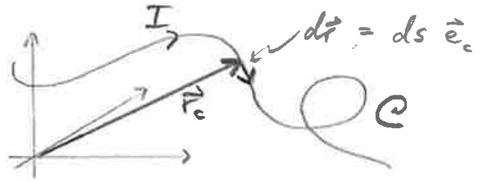
Statik: gegeben $\rho, \vec{j}$ ohne Zeitargument

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \phi(\vec{r}) \\ \vec{A}(\vec{r}) \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \int \frac{d^3\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \begin{pmatrix} c\rho(\vec{r}\,') \\ \vec{j}(\vec{r}\,') \end{pmatrix}$$

Bem.:
- $\int d^3\vec{r}\,'$ über ganzen Raum
- Anordnungen, die bis nach ∞ reichen, gibt es nicht; wohl aber $\vec{r}$'s, von denen aus die Ränder des Objekts weit weg erscheinen.
- $$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2} = \sqrt{(\vec{\rho}-\vec{\rho}\,')^2+(z-z')^2} = \sqrt{(\vec{r}-\vec{r}\,')^2} = \sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}$$

  (wenn man $\vec{r}\,'$-Kugelkoord. um $\vec{r}$ wählt, dann ist θ Kugelkoord.)
- $\vec{r}\,' \to \vec{r}\,'+\vec{r}$ oder $z' \to z'+z$ im Integrand erlaubt (wegen ∞ Grenzen)

häufigste Magnetostatik-Pathologie: ∞ dünner Draht



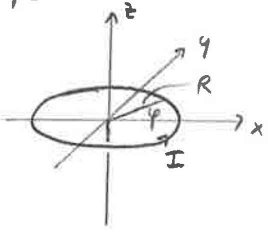
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{d^2\vec{r}\,'_\perp\, ds'\,\vec{e}_c}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, I\,\delta^{(2)}([\vec{r}\,'-\vec{r}_c]_\perp) = \frac{1}{c}\int \frac{ds'\,\vec{e}_c}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, I = \frac{I}{c}\int_{\mathcal{C}} d\vec{r}\,' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{I}{c}\int_{\mathcal{C}} \left(\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)\times d\vec{r}\,' = \frac{I}{c}\int_{\mathcal{C}} d\vec{r}\,'\times\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$\left(\left(\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\quad|^3} \right)\right)$$

Biot-Savart Formel

Bsp (Ringstrom durch ∞ dünnen Draht)



wie groß ist $B(\vec r)$ auf z-Achse?

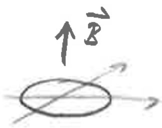
in Biot-Savart, $\int_C d\vec r\,' = \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{d\vec r\,'}{d\varphi}$,

mit $\vec r\,' = R \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d\vec r\,'}{d\varphi} = \vec e_\varphi = R \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$;

gefragt ist nach $\vec r = z\vec e_3 \Rightarrow \vec r - \vec r\,' = \begin{pmatrix} -R\cos\varphi \\ -R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$, $|\vec r - \vec r\,'| = \sqrt{R^2+z^2}$

es gilt $\frac{d\vec r\,'}{d\varphi} \times (\vec r - \vec r\,') = \det \begin{pmatrix} \vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3 \\ -R\sin\varphi & R\cos\varphi & 0 \\ -R\cos\varphi & -R\sin\varphi & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} zR\cos\varphi \\ zR\sin\varphi \\ R^2 \underbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{=1} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec B(z\vec e_3) = \frac{I}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} zR\cos\varphi \\ zR\sin\varphi \\ R^2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{I}{c} \frac{2\pi R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



statische Momente

→ oft ist Ladungs-/Strom-Dichte "lokalisiert";

wie sehen die Potentiale von "weit weg" aus?

, $r \gg$ alle $|\vec r\,'|$

$\Rightarrow$ kann allg. Potentiale $\begin{pmatrix} \phi \\ \vec A \end{pmatrix}(\vec r) = \int_V \frac{d^3 r'}{|\vec r - \vec r\,'|} \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec j \end{pmatrix}(\vec r\,')$

durch Taylor-Entwicklung in $\vec r\,'$ vereinfachen

- zur Erinnerung: $f(x+\varepsilon) = f(x) + \varepsilon f'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!} f''(x) + \frac{\varepsilon^3}{3!} f'''(x) + \dots$
$= \underbrace{e^{\varepsilon \partial_x}} \cdot f(x)$ Translationsoperator

- $\frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|} = e^{-\vec r\,'\cdot\vec\nabla} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \underbrace{\vec r\,'\cdot\vec\nabla \frac{1}{r}} + \frac{1}{2}(\vec r\,'\cdot\vec\nabla)(\vec r\,'\cdot\vec\nabla)\frac{1}{r} - \dots$

$= x_i' \partial_{x_i} \left((x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = - x_i' \frac{x_i}{r^3} = - \frac{\vec r\,'\cdot\vec r}{r^3}$

und $\partial_j \partial_k \frac{1}{r} = \partial_j \left(-\frac{x_k}{r^3} \right) = - \frac{\delta_{jk}}{r^3} + 3 \frac{x_j x_k}{r^5}$

$= \frac{1}{r} + \frac{\vec r\,'\cdot\vec r}{r^3} + \frac{1}{2r^5}\left(3(\vec r\,'\cdot\vec r)^2 - r^2 r'^2 \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4} \right)$