(c) $\Box\phi = 4\pi\rho$ via F.T.

Vorsichtsmaßnahme: $\quad \Box \to \bar{\Box} \equiv \frac{1}{c^2}\partial_t^2 + 2\gamma\frac{1}{c}\partial_t - \Delta$

mit $\gamma = 0^+$ (infinit. Reibung, "Watte im Klavier")

mit Wellengleichung: $\quad \left[-\frac{\omega^2}{c^2} - i\omega\frac{2\gamma}{c} + k^2\right]\tilde{\phi}(\vec{k},\omega) = 4\pi\,\tilde{\rho}(\vec{k},\omega)$

Lsg: $\quad \tilde{\phi}(\vec{k},\omega) = \dfrac{4\pi\tilde{\rho}(\vec{k},\omega)}{[\dots]} = \dfrac{4\pi\tilde{\rho}(\vec{k},\omega)}{\left[(k-\frac{\omega}{c}-i\gamma)(k+\frac{\omega}{c}+i\gamma) - \cancel{\gamma^2}\right]}$

(weil infinit²)

Rücktrafo

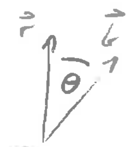
$$\Rightarrow \quad \phi(\vec{r},t) = \int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\int\frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega t}\,\frac{4\pi}{[\dots]}\int d^3\vec{r}\,'\int dt'\, e^{-i\vec{k}\vec{r}\,'+i\omega t'}\rho(\vec{r}\,',t')$$

$$= \int d^3\vec{r}\,'\int dt'\,\underbrace{\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\int\frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')-i\omega(t-t')}\frac{1}{[\dots]}}_{\equiv\, G(\vec{r}-\vec{r}\,',\,t-t')}\,4\pi\rho(\vec{r}\,',t')$$

berechne

$$G(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\int d\omega\, e^{-i\omega t}\,\underbrace{\frac{1}{(k-\frac{\omega}{c}-i\gamma)(k+\frac{\omega}{c}+i\gamma)}}_{=\,\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{(-)}+\frac{1}{(+)}\right)}$$

(Partialbruchzerlegung)



$\vec{k}\vec{r} = kr\cos\theta = -kru$

$$\int d^3k\, e^{i\vec{k}\vec{r}} = 2\pi\int_0^\infty dk\,k^2\int_{-1}^{1}du\, e^{-ikru} = 2\pi\int_0^\infty dk\,k^2\,\frac{2\sin(kr)}{kr}$$

$$\int_0^\infty dk = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dk \quad \text{(erlaubt, da Integrand gerade in } k\text{)}.$$

jetzt hier $k\to -k$

$$= \frac{1}{r}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\omega\, e^{-i\omega t}\int dk\,\sin(kr)\,\frac{1}{k-\frac{\omega}{c}-i\gamma}$$

((oder gleich per Mathematica))

$k \to k + \omega/c$

$$\int dk\,\sin(kr)\frac{1}{k-\frac{\omega}{c}-i\gamma} = \int dk\,\sin\!\left(kr+\frac{\omega}{c}r\right)\frac{1}{k-i\gamma}$$

$$= \int dk\,\left[\sin(kr)\cos\!\left(\frac{\omega}{c}r\right)+\cos(kr)\sin\!\left(\frac{\omega}{c}r\right)\right]\left(\frac{k}{k^2+\gamma^2}+\frac{i\gamma}{k^2+\gamma^2}\right)$$

$$= \cos\!\left(\frac{\omega}{c}r\right)\int dk\,\frac{k\sin(kr)}{k^2+\gamma^2} + i\sin\!\left(\frac{\omega}{c}r\right)\int dk\,\cos(kr)\underbrace{\frac{\gamma}{k^2+\gamma^2}}_{\approx\delta\;\to\;\pi\delta(k)}$$

$$= \left\{\cos\!\left(\frac{\omega}{c}r\right)+i\sin\!\left(\frac{\omega}{c}r\right)\right\}\pi e^{-\gamma r} \overset{\gamma\to 0}{=} \pi e^{i\omega\frac{r}{c}}$$

$$G = \frac{\pi}{r(2\pi)^3}\underbrace{\int d\omega\, e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}_{=\,2\pi\delta(t-\frac{r}{c})} = \frac{\delta(t-\frac{r}{c})}{4\pi r}, \quad \text{weiter wie (B)}$$

Bem. zu (B), (C)

Wir hätten zu $\Box\phi = 4\pi\varrho$ auch so denken können:

$4\pi\varrho$ = Ursache, ϕ = Antwort

doppelte Ursache $\Rightarrow$ doppelte Antwort : Zusammenhang ist linear

der allg. lineare Zshg ((vgl. $\vec{a} = \text{Matrix}\cdot\vec{u}$, $a_j = \underbrace{\text{Matrix}_{jk}\, u_k}_{\Sigma}$))

hat die Form $\phi(\vec{r},t) = \int d^3\vec{r}\,' \int dt'\, G(\vec{r},t;\vec{r}\,',t')\, 4\pi\varrho(\vec{r}\,',t')$

$$\parallel$$

der Zshg ist transl.-invariant: $G(\vec{r}-\vec{r}\,', t-t')$

und nun: (B) G-Eigenschaften?

$$\Box\phi = \int' \underbrace{\Box G}_{=\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\delta(t-t')}\, 4\pi\varrho(\vec{r}\,',t') = 4\pi\varrho(\vec{r},t)$$

(Greens erfunden!)

(C) F.T. des allg. lin. Zshg's:

$$\tilde{\phi} = \tilde{G}\cdot 4\pi\tilde{\varrho}\,, \quad \text{vgl. mit Wellengl.} \quad \tilde{\phi} = \frac{4\pi\tilde{\varrho}}{[\ldots]}$$

$$\Rightarrow \tilde{G} = \frac{1}{[\ldots]}\,, \quad G = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int\frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega t}\,\frac{1}{[\ldots]}\,, \text{ s.o.}$$

Faltungsintegrale faktorisieren im Fourier-Raum!

Faltungsintegral: $\int dy\; K(x-y)\, f(y) = g(x)$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\int dy}_{\to\, 2\pi\,\delta(k-q)} \int\frac{dq}{2\pi}\, e^{iq(x-y)}\,\tilde{K}(q) \int\frac{dk}{2\pi}\, e^{iky}\,\tilde{f}(k) = \int\frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx}\,\tilde{g}(k)$$

$$\Rightarrow \tilde{K}(k)\cdot\tilde{f}(k) = \tilde{g}(k) \qquad \text{qed}$$