# 8. Retardierte Potentiale

(verzögerte, rückbezügliche ...)

$\rightsquigarrow$ suchen nun allg. kausale Lsg der Max zu gegebenen $\rho, \vec{j}(\vec{r},t)$

("reine", "enge" ED allg. lösbar, da Max linear in $\vec{E}, \vec{B}$)

hier: Lsg auf 4 Wegen, A, B, C, D

## (A) Nachdenken:

E-Statik: • Superposition von Coulomb-Potentialen (§6.2, S.80)

$$\rightsquigarrow \quad \phi(\vec{r}) = \int d^3r' \, \frac{c\,\rho(\vec{r}\,')}{c\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

• inhom Wellenglg (§6.3, S.86)

$$\Big(\underbrace{\cancel{\tfrac{1}{c^2}\partial_t^2}}_{\text{Statik}} - \Delta\Big)\begin{pmatrix}\phi\\ \vec{A}\end{pmatrix} = \frac{4\pi}{c}\begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j}\end{pmatrix}$$

besagt, dass die Ursachen $c\rho, j_1, j_2, j_3$ gleiche Antwort haben $\rightsquigarrow \quad \vec{A}(\vec{r}) = \int d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{c\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$

Dynamik: • bewege Ursache; was frei fliegt, fliegt mit $c$ (§7, S.93) von $\vec{r}\,'$ bis $\vec{r}$, also:

$$\boxed{\begin{pmatrix}\phi(\vec{r},t)\\ \vec{A}(\vec{r},t)\end{pmatrix} = \frac{1}{c}\int \frac{d^3r'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j}\end{pmatrix}\Big(\vec{r}\,', t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\Big)}$$

retardierte Potentiale (in Lorenz-Eichung)

Bem.: • die ret. Pot. gelten in Lorenz-Eichung (weil die oben benutzte inh. Wellenglg. in dieser gilt)

Probe: $0 \overset{?}{=} \frac{1}{c}\dot{\phi} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ (L-Eichbedingung, §6.3, S.84)

$$= \frac{1}{c}\int' \Big[\frac{1}{|\,|}\dot{\rho} + \frac{1}{|\,|}\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \vec{j}\cdot\underbrace{\vec{\nabla}\frac{1}{|\,|}}_{=-\vec{\nabla}'\frac{1}{|\,|}}\Big] \quad \text{Trick!}$$

$$= \frac{1}{c}\int' \frac{1}{|\,|}\Big[\dot{\rho} - \vec{\nabla}'\cdot\vec{j}\big(\vec{r}\,', t-\tfrac{|\,|}{c}\big) + \underbrace{\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}\big(\vec{r}\,', t-\tfrac{|\,|}{c}\big)}_{=\operatorname{div}\vec{j}}\Big]$$

$= 0$ wegen Kontinuitätsglg.

- die ret. Pot. $\boxed{\cdots}$ sind eine <u>spez. Lsg.</u> der inhom. Wellenglg. $\Box \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = \frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} c\varrho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$,
  also ist die <u>allg. Lsg.</u> gegeben durch $\boxed{\cdots} + \begin{pmatrix} \text{alle Lsn von} \\ \Box \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = 0 \end{pmatrix}$

  $\underline{\Box = 0}$ für Wellen (s. §7) sowie lineares in $\vec{r}, t$,
  d.h. <u>nicht</u> von $\varrho, \vec{j}$ verursacht ("kausal")

- phys. Gehalt von $\boxed{\cdots}$ : s. unten, § 9.1 – (ca.) § 9.6

## (B) Greensche Funktion

<u>Erinnerung</u>: allg. $L\, y(x) = f(x)$
gegeben: $f$ und $L \hat{=}$ linearer Operator
gesucht: $y(x)$
(( <u>Bsp</u>: inh. Wellenglg, $L = \Box$, $x = \vec{r}, t$ ))

$\rightsquigarrow$ falls das Hilfsproblem $L\, G = \delta(x - x')$ lösbar ist mit spez Lsg $G(x, x')$, dann gilt

$$\int dx' f(x')\, L\, G(x, x') = \int dx' f(x')\, \delta(x - x') = f(x)$$

$\Rightarrow$ spez Lsg $\quad y(x) = \int dx'\, G(x, x')\, f(x')$

(( <u>Bsp</u>: $\Delta \phi = -4\pi \varrho$, $L = \Delta$, $\Delta G = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$,
(§6.3, S. 81) $G = -\frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}\,'|}$, $\phi = \int d\vec{r}\,' \left( -\frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right) \left( -4\pi \varrho(\vec{r}\,') \right)$
$= \int d\vec{r}\,' \frac{\varrho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$ Statik ✓✓ ))

<u>nun</u>: $\Box \phi = 4\pi \varrho$, $L = \Box$

$$\Box\, G(\vec{r}, \vec{r}\,'; t, t') = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}\,')\, \delta(t - t')$$

$\| \; G(\vec{r} - \vec{r}\,', t - t')$, weil $\Box$ keinen Ort / Zeit auszeichnet löse also: $\Box G(\vec r,t) = \underset{\sim}{\delta^{(3)}(\vec r)}\,\delta(t)$ [s. auch Landau II, § 62]

<u>sehe</u> Kugelsymmetrie $\Rightarrow$ nur $|\vec r|$-Abhängigkeit

in Kugelkoord., $\Delta = \frac{1}{r}\partial_r^2 r + \dots \partial_\theta, \partial_\varphi \dots$

$\rightsquigarrow$ Ansatz: $G(r,t) = \frac{1}{r} f(r,t)$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{1}{r}\ddot f - \underbrace{\left(\Delta\frac{1}{r}\right)}_{-4\pi\delta^{(3)}(\vec r)} f - 2\underbrace{\left(\vec\nabla\frac{1}{r}\right)}_{-\frac{\vec r}{r^3}}\cdot\underbrace{\left(\vec\nabla f\right)}_{\frac{\vec r}{r}f'} - \frac{1}{r}\underbrace{\Delta f}_{f''+\frac{2}{r}f'} = \delta^{(3)}(\vec r)\,\delta(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r}\left(\frac{1}{c^2}\ddot f - f''\right) + 4\pi f(0,t)\,\delta^{(3)}(\vec r) = \delta^{(3)}(\vec r)\,\delta(t)$$

für $r \neq 0$: $\frac{1}{c^2}\ddot f = f''$ $\Rightarrow$ $f = f(r \mp ct)$ (schwingende Saite)

$\Rightarrow$ bei $\vec r = \vec 0$: $4\pi f(\mp ct) = \delta(t) = c\,\delta(ct)$

$\rightsquigarrow$ $f = \frac{c}{4\pi}\,\delta(r \mp ct)$

$$\Rightarrow \boxed{G(\vec r,t) = \frac{\delta(t - r/c)}{4\pi r}}$$ löst $\Box G(\vec r,t) = \delta^{(3)}(\vec r)\,\delta(t)$

mit <u>aus</u>laufender Kugelwelle: <u>retardierte Greensche Fkt</u>

(( $G = \frac{\delta(t + r/c)}{4\pi r}$ ist bei $t<0$ <u>ein</u>laufende Kugelwelle:

avancierte Greensche Fkt; $\Box(G\text{-Diff.}) = 0$ ))

$\rightsquigarrow$ mit $G$ können wir nun sofort die Lsg von $\Box\phi = 4\pi\varrho$ angeben:

$$\phi(\vec r,t) = \int d^3r' \int dt' \,\frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\vec r - \vec r'|}{c}\right)}{4\pi|\vec r - \vec r'|}\, 4\pi\varrho(\vec r', t')$$

$$= \frac{1}{c}\int \frac{d^3r'}{|\vec r - \vec r'|}\, c\,\varrho\left(\vec r', t - \frac{|\vec r - \vec r'|}{c}\right)$$

analog für $\Box\vec A = \frac{4\pi}{c}\vec j$

} $\equiv$ retardierte Potentiale von S. 95 ✓✓