7. Elektromagnetische Wellen / Licht

→ sind interessiert an Lsn der zeitabhängigen (zunächst Vakuum-) Max.

Bsp wie stellt man $\vec{E} = (0, 0, f(x - vt))$ her?

(Max1) $\partial_z f = 0 \stackrel{!}{=} 4\pi\rho \Rightarrow \rho = 0$; keine Ladungsdichte nötig

(Max2) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = (0, -f', 0) \stackrel{!}{=} -\frac{1}{c}\partial_t \vec{B}$

$\Rightarrow \vec{B} = (0, -\frac{c}{v}f, 0) + \vec{const}_t(\vec{r})$; $\vec{const}_t(\vec{r}) = \vec{0}$ am billigsten

(Max3) $\partial_y B_2 = 0 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow$ bereits erfüllt

(Max4) $\vec{\nabla} \times \vec{B} = (0, 0, -\frac{c}{v}f') \stackrel{!}{=} \frac{1}{c}(0, 0, -vf') + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$

$\Rightarrow \vec{j} = -\frac{c^2}{4\pi v}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) f'(x - vt)\, \vec{e}_3$

Bem
- spanne Raum voller vertikaler Drähte; mit entsprechendem $\vec{j}$ beschienen
- $\vec{B} = \frac{c}{v}\vec{e}_1 \times \vec{E}$ fliegt mit $\vec{E}$ mit
- $v = c$: von alleine! $\rho = 0, \vec{j} = 0$, "Vakuum"
- $v > c$? j^n.
- Licht im Medium kann den zu $v \neq c$ erforderlichen Strom selbst verursachen.

Verallg.: ebene Welle $\vec{E} = \vec{E}_0 f(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$

(Max1) erzwingt $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \vec{\nabla} f = \vec{E}_0 \cdot \vec{k} f' \stackrel{\text{Vakuum}}{=} 0$

$\Rightarrow \vec{E}_0 \perp \vec{k}$, Licht ist transversal

vgl. Bsp oben (dort $\vec{E}_0 \sim \vec{e}_3$, $\vec{k} \sim \vec{e}_1$)

$f\left(k\left[\frac{\vec{k}}{k}\vec{r} - \frac{\omega}{k}t\right]\right)$, $v \stackrel{\text{Vakuum}}{=} c \Rightarrow \omega = ck$

$[\ldots] =$ fest ist Glg. einer Ebene ($\vec{e}\vec{r} =$ Abstand)

(Ebene gleicher f-Werte, $\perp$ zu $\vec{k}$)

f muss nicht trig. Fkt sein; aber oft: periodische Sender

harmonische ebene elektromagn. Welle

$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t)$, $\omega_k = ck$ (Vakuum)

$\vec{E}_0 \perp \vec{k}$ (wg. Max1) , $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E}$ folgt mit

phys. Interpretation :

- Foto (Zeit fest): Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ ← Wellenzahl
- Ort fest : Periode $T = \frac{2\pi}{\omega_k} = \frac{1}{\nu}$ ← Frequenz; ω_k ← Kreisfrequenz
- $v_{ph} = c$; $v_{gr} = c$ (weil bei Überlagerungen jeder Summand mit c)
- 

- wählbar : $\vec{k}$, $\vec{E}_0$ ($\perp \vec{k}$; "Polarisation")
  und Phase $\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t + \varphi) = \mathrm{Re}\, e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega_k t + i\varphi}$
- superponierbar (..., zirkular, ...)

Max ⇒ Wellengleichung

Vakuum ($\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$) $\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dot{\vec{B}}/c$

$\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \dot{\vec{E}}/c$

((Bem.: invar. unter $\vec{E} \to \vec{B}$, $\vec{B} \to -\vec{E}$; "Dualität"))

$\vec{B}$ eliminieren via $\vec{\nabla}\times$ (Max2) :

$$\underset{B}{\vec{\nabla}}\times(\underset{A}{\vec{\nabla}}\times\underset{C}{\vec{E}}) = B(A\cdot C) - C(A\cdot B) = \vec{\nabla}(\overset{0\ (\text{Max1})}{\cancel{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}}) - \vec{\nabla}^2\vec{E} \overset{!}{=} -\frac{1}{c}\partial_t\, \vec{\nabla}\times\vec{B} \overset{(\text{Max4})}{=} -\ddot{\vec{E}}/c^2$$

$\Rightarrow \boxed{\Box\vec{E} = \vec{0} \ , \ \Box\vec{B} = \vec{0}}$ Wellengln. im Vakuum

(($\Box = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta$, $\Delta = \vec{\nabla}^2$; vgl. §6.3, S.83))

Bem.: • Info verlorengegangen: Max sorgen für $\vec{E} \perp \vec{B}$; Wellengln. nicht!

• was lernen wir aus Wellengln.?

⤳ Weil $\vec{E}(\vec{r},t)$ darstellbar ist als

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega t}\, \tilde{\vec{E}}(\vec{k},\omega)$$

hat $\Box \vec{E} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega t} \left[-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2\right] \tilde{\vec{E}} \overset{!}{=} 0$

$\omega^2 = c^2 k^2$ zur Folge, und zwar für jeden Anteil.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{ein Feld, das frei fliegt, fliegt mit } c}$

Wdh Fourier-Transformation (vgl. z.B. Rechenmethoden)

F.T. hat 2 essentials: • man darf (wenn Fkt abfallen $\to \infty$)

• die Fkt'n $e^{i\dots}$ sind lin. unabh.

1D: $f(x) = \int \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx}\, \tilde{f}(k)$

$$\Rightarrow \int dx\, e^{-iqx} f(x) = \int \frac{dk}{2\pi}\, \tilde{f}(k) \underbrace{\int dx\, e^{i(k-q)x}}_{\overset{!}{=} 2\pi\delta(k-q)} = \tilde{f}(q)$$

3D: $f(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{k}\vec{x}}\, \tilde{f}(\vec{k})$

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \int d^3\vec{x}\, e^{-i\vec{k}\vec{x}} f(\vec{x})$$

$$\int d^3\vec{x}\, e^{i(\vec{k}-\vec{q})\vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{q})$$

oft nützlich: $\vec{\nabla} e^{i\vec{k}\vec{x}} = \sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} e^{i\vec{k}\vec{x}} = \sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j\, i k^j e^{i\vec{k}\vec{x}} = i\vec{k}\, e^{i\vec{k}\vec{x}}$

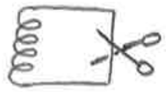
⤳ $\vec{\nabla} \overset{\times}{\cdot} \vec{f}(\vec{r}) = \overset{(\rightarrow)}{\text{bel}}(\vec{r})$

$$\Leftrightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \underbrace{\vec{\nabla} \overset{\times}{\cdot} e^{i\vec{k}\vec{r}}}_{\overset{!}{=} (\vec{\nabla} e^{i\vec{k}\vec{r}}) \overset{\times}{\cdot} = e^{i\vec{k}\vec{r}}\, i\vec{k} \overset{\times}{\cdot}} \tilde{\vec{f}}(\vec{k}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\, \overset{(\rightarrow)}{\widetilde{\text{bel}}}(\vec{k})$$

Koeff-Vergl.: $i\vec{k} \overset{\times}{\cdot} \tilde{\vec{f}}(\vec{k}) = \overset{(\rightarrow)}{\widetilde{\text{bel}}}(\vec{k})$

⤳ zum Merken: in FT-Gln $\underline{\vec{\nabla} \to i\vec{k}}$

löse Anfangswertproblem (für Felder im Vakuum: $\rho = 0,\ \vec{j} = \vec{0}$)

$\vec{E}(\vec{r},0)$, $\vec{B}(\vec{r},0)$ gegeben (z.B. )

$\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$ gesucht

zu lösen: Max in Vakuum

F.T. nur bzgl. $\vec{r}$: $\vec{E}(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\, \tilde{\vec{E}}(\vec{k},t)$

$$\tilde{\vec{E}}(\vec{k},0) = \int d^3r\, e^{-i\vec{k}\vec{r}}\, \vec{E}(\vec{r},0) \equiv \vec{e}(\vec{k})$$

$$\tilde{\vec{B}}(\vec{k},0) = \int d^3r\, e^{-i\vec{k}\vec{r}}\, \vec{B}(\vec{r},0) \equiv \vec{b}(\vec{k})$$

Vakuum-$\widetilde{\text{Max}}$: $i\vec{k}\cdot\tilde{\vec{E}}(\vec{k},t) = 0$, $i\vec{k}\cdot\tilde{\vec{B}}(\vec{k},t) = 0$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\vec{E}}(\vec{k},t) \\ \tilde{\vec{B}}(\vec{k},t) \end{pmatrix}^{\bullet} = \underbrace{ci\vec{k}\times}_{\text{(Kreuzprod.)}} \begin{pmatrix} \tilde{\vec{B}}(\vec{k},t) \\ -\tilde{\vec{E}}(\vec{k},t) \end{pmatrix} = I\, ci\vec{k}\times \begin{pmatrix} \tilde{\vec{E}}(\vec{k},t) \\ \tilde{\vec{B}}(\vec{k},t) \end{pmatrix}$$

mit $I \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $I^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1}_{2\times 2}$

((generell hat $\dot\psi = H\psi$ die formale Lsg $\psi(t) = e^{tH}\psi(0)$))

$$\Rightarrow \left(\ \right)_{(t)} = \underbrace{e^{tIci\vec{k}\times}}_{\text{Operator; Anwendung als Potenzreihe!}} \left(\ \right)_{(t=0)} \quad \text{(Kreuzprod)}$$

$= \cos(tIc\vec{k}\times) + i\sin(tIc\vec{k}\times)$

$$(ctI\vec{k}\times)^2 \underset{\vec{E}\text{ oder }\vec{B}}{\vec{V}} = (ct)^2 I^2 \underbrace{\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{V})}_{\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{V}) - \vec{k}^2\vec{V} \xrightarrow{\text{(Max 1,3)}} -\vec{k}^2\vec{V}} = (ctk)^2\vec{V}$$

$= \cos(ctk)\,\mathbb{1} + i\sin(ctk)\, I\, \frac{\vec{k}}{k}\times$

$= \begin{pmatrix} \cos(\ ) & +i\sin(\ )\frac{\vec{k}}{k}\times \\ -\ \dots & \cos(\ ) \end{pmatrix}$

also z.B. $\tilde{\vec{E}}(\vec{k},t) = \cos(ctk)\,\vec{e} + i\sin(ctk)\,\frac{\vec{k}}{k}\times\vec{b}$

Rücktrafo

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{k}\vec{r} - ickt}\left[\vec{e} - \frac{\vec{k}}{k}\times\vec{b}\right]$$

(($\rightsquigarrow$ $\vec{B}(\vec{r},t)$ genauso; Ü))