6.4 Rekapitulation, Beispiele

- die "Postkarte aus 1863":

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \,, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \dot{\vec{B}}/c = \vec{0}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \,, \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \dot{\vec{E}}/c = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$
$$m\dot{\vec{v}} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right)$$

Max $\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}$

$\rho, \vec{j}$ gegeben
$\Rightarrow \vec{E}, \vec{B}$ eindeutig
$\rightsquigarrow$ Ansätze erlaubt

- (aus Spaß:) def $\vec{\psi} \equiv \vec{E} + i\vec{B}$

$$\left(\Leftrightarrow \vec{E} = \mathrm{Re}\,\vec{\psi} = \tfrac{1}{2}(\vec{\psi}+\vec{\psi}^*) \,, \quad \vec{B} = \mathrm{Im}(\vec{\psi}) = \tfrac{1}{2i}(\vec{\psi}-\vec{\psi}^*)\right)$$
$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{\psi} = 4\pi\rho \,, \quad \vec{\nabla}\times\vec{\psi} - \frac{i}{c}\dot{\vec{\psi}} = \frac{i}{c}4\pi\vec{j}$$

- aus §6.3: es ex. (immer) Potentiale $\phi, \vec{A}$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}}/c \,, \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$
$$\Rightarrow \left(\tfrac{1}{c^2}\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2\right)\begin{pmatrix}\phi\\ \vec{A}\end{pmatrix} = \frac{4\pi}{c}\begin{pmatrix}c\rho\\ \vec{j}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{c}\partial_t\\ -\vec{\nabla}\end{pmatrix}\underbrace{\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \dot{\phi}/c\right)}_{=0 \text{ in Lorentz-Eichung}}$$
$$L = \frac{m}{2}\vec{v}^2 - q\phi + \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}$$

erfüllt Max 2, 3
Max $\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}$
4 Gln, 4 Freiheitsgrade

"Eich"invarianz: $\begin{pmatrix}\phi\\ \vec{A}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\phi\\ \vec{A}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{c}\partial_t\\ -\vec{\nabla}\end{pmatrix}\chi$ erlaubt, $\chi(\vec{r},t)$ beliebig

- aus S.86: Max in integraler Form, via Integralsätze

$$\left(\begin{array}{ll}\text{Gauss} & \int_V d^3r\, \vec{\nabla}\cdot\vec{\cdot} = \oint_{\partial V} d\vec{f}\cdot\vec{\cdot} \\ \text{Stokes} & \int_F d\vec{f}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{\cdot}) = \oint_{\partial F} d\vec{r}\cdot\vec{\cdot}\end{array}\right) \rightsquigarrow \text{bilde } \int_V d^3r \begin{smallmatrix}\text{Max1}\\ \text{Max3}\end{smallmatrix} \,, \quad \int_F d\vec{f}\cdot \begin{smallmatrix}\overrightarrow{\text{Max2}}\\ \overrightarrow{\text{Max4}}\end{smallmatrix}$$

$$\oint_{\partial V} d\vec{f}\cdot\vec{E} = \int_V d^3r\, 4\pi\rho \,, \quad \oint_{\partial F} d\vec{r}\cdot\vec{E} + \tfrac{1}{c}\partial_t \int_F d\vec{f}\cdot\vec{B} = \vec{0}$$
$$\oint_{\partial V} d\vec{f}\cdot\vec{B} = 0 \,, \quad \oint_{\partial F} d\vec{r}\cdot\vec{B} - \tfrac{1}{c}\partial_t \int_F d\vec{f}\cdot\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\int_F d\vec{f}\cdot\vec{j}$$

$\rightsquigarrow$ wenn anwendbar, dann komfortabel (keine $\vec{\nabla}$ mehr!)
(aber auch immer per Ansatz via lokaler Max lösbar)

- ... später weitere Umformulierungen:
Max in der (Fourier-) Unterwelt ...

Bsp (Ladungsdichte → Ladung)

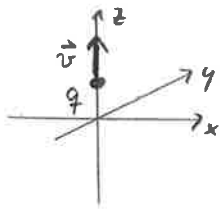
gegeben: $\rho(\vec r) = \frac{\alpha}{r^2} e^{-\beta r} \cos^2\theta$. Gesamtladung $Q = ?$

$$Q = \alpha \int_0^\infty dr\, r^2 \frac{e^{-\beta r}}{r^2} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \cos^2\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \alpha \left(-\frac{1}{\beta} e^{-\beta r}\Big|_0^\infty\right)\left(-\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big|_0^\pi\right) 2\pi = \alpha \frac{1}{\beta}\frac{2}{3} 2\pi$$

Bsp (Stromdichte → Strom)

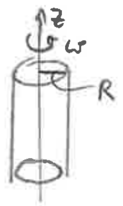
Punktladung q fliege mit $\vec v = v\vec e_3$. Strom durch xy-Ebene $I(t) = ?$



$$\vec j = \rho \vec v = q\,\delta(\vec r - vt\vec e_3)\, v\vec e_3$$

$$I \overset{(5.76)}{=} \int_F d\vec f \cdot \vec j = \int dx\,dy\; qv\,\delta(\vec r - vt\vec e_3) = qv\,\delta(\underbrace{z}_{z=0 \text{ in } xy\text{-Ebene}} - vt) = qv\,\delta(t)$$

Bsp (Stromdichte, Strom)



homogen geladener, ∞ langer Zylinder (Radius R, Ladungsdichte ρ) drehe sich mit Winkelgeschw. $\vec\omega = \omega \vec e_3$ um seine Symmetrieachse.

Stromdichte $\vec j = ?$ $\quad \vec j = \rho \vec v = \rho\, \vec\omega \times \vec r = \rho\omega r\, \vec e_\varphi\, \Theta(r-R) = \rho\omega \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \Theta(r-R)$

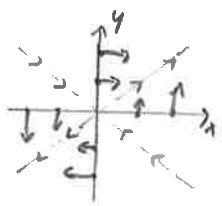
Strom pro Höhenintervall h durch rechte xz-Halbebene $I = ?$

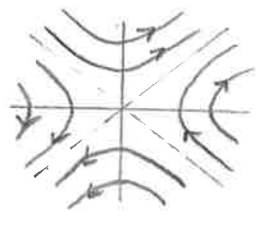
$$I = \int_F d\vec f \cdot \vec j = \int_0^R dx \int_0^h dz\; \rho\omega x = \rho\omega \left(\frac{1}{2}x^2\Big|_0^R\right) h = \frac{1}{2} h \rho\omega R^2$$

Bsp (Divergenz, Rotation)

gegeben: $\vec j = \alpha (y, x, 0)$. $\operatorname{div} \vec j = ?$ $\quad \operatorname{rot} \vec j = ?$

Ladungsströmung malen:





ausrechnen: $\vec\nabla \cdot \vec j = 0$

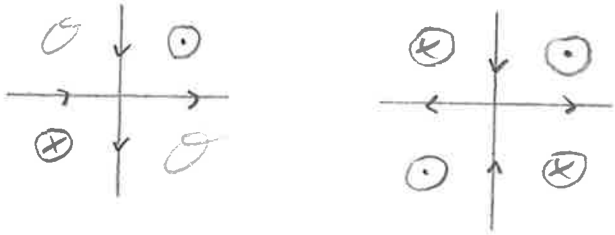
$$\vec\nabla \times \vec j = \alpha (0, 0, 1-1) = \vec 0$$

Bsp ($\vec{B}$ - Ansätze)

In zwei $\perp$, ∞ dünnen Platten herrsche homogene Stromdichte.

$\vec{B}$-Richtung = ?

Rechte-Hand-Regel!

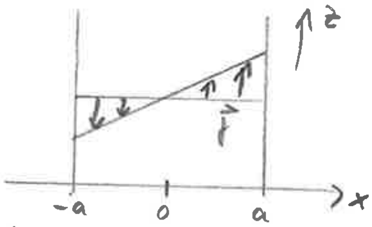


Bsp (Max 4 per Ansatz)

In ∞ ausgedehnter Schicht $(-a<x<a)$

fliesse Strom in $\pm z$-Richtung,

Stromdichte linear von $-j_0\vec{e}_3 \dots +j_0\vec{e}_3$ zunehmend. $\vec{B} = ?$



$$\vec{j} = j_0 \frac{x}{a}\, \vec{e}_3\, \Theta(a^2-x^2)$$

Ansatz $\vec{B} = (0, f(x), 0)$ (Max 3 ✓)

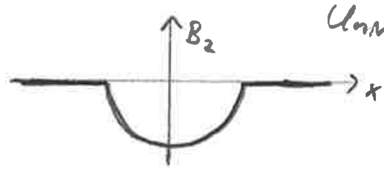
Max 4: $$\vec{\nabla}\times(0,f,0) = (0,0,f') \overset{!}{=} \begin{cases} \underbrace{\boxed{\frac{2\pi}{c}\frac{j_0}{a}}}_{\alpha}(0,0,2x) & \text{innen} \\ 0 & \text{außen}\end{cases}$$

$\Rightarrow f_{\text{innen}} = \alpha x^2 + C$, $f_{\text{außen}} = \text{const} \equiv \begin{cases} D & \text{links} \\ E & \text{rechts}\end{cases}$

$\vec{B}$ stetig bei $x = \pm a$ (denn wenn B springt (Θ) $\rightsquigarrow$ rot $\vec{B}$ hat δ, aber $\vec{j}$ hat keins)

$\rightsquigarrow$ $D = \alpha a^2 + C = E = 0$ (wenn keine Spule am Rand des Universums)

$$\Rightarrow \vec{B} = \begin{cases} \vec{e}_2\, \alpha(x^2-a^2) & \text{innen} \\ \vec{0} & \text{außen}\end{cases} :$$



Bsp (Teilchen im Magnetfeld)

Löse die Bewegungsgleichung für ein Teilchen im konstanten $\vec{B} = (0,0,B)$

durch Einführen der komplexen Variablen $z = v_1 + i v_2$ $(\vec{v} = \dot{\vec{r}})$:

$$m\dot{\vec{v}} = \frac{q}{c}\vec{v}\times\vec{B} = \frac{qB}{c}(v_2, -v_1, 0) \Leftrightarrow m\dot{z} = -\frac{qB}{c} i z$$

$$\Rightarrow z = e^{-i\frac{qB}{mc}t} \quad \left(= \cos\frac{qB}{mc}t - i\sin\frac{qB}{mc}t \right)$$

Bsp (Vektorpotential, Eichung)

homogenes, konstantes Magnetfeld $\vec{B} = (0,0,B)$. $\vec{A} = ?$

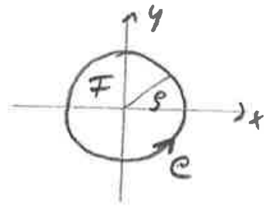
$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$, $\quad \vec{A} = B(0,x,0)$ tut's

welches neue $\vec{A}$ erhält man durch Eichtransformation $\chi = -\frac{B}{2}xy$?

$$\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\chi = B(0,x,0) - \frac{B}{2}(y,x,0) = \frac{B}{2}(-y,x,0) = \frac{B}{2}\rho\,\vec{e}_\varphi$$

Bsp (integrale Max 2)

sei $\vec{B} = (0,0,-\underset{\text{const.}}{\alpha} t)$ und $\vec{E} = E(\underset{\sqrt{x^2+y^2}}{\rho})\,\vec{e}_\varphi$. $\quad E(\rho) = ?$



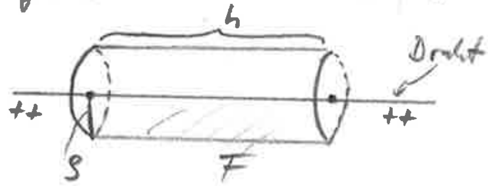
∫Max2: $\int_C d\vec{r}\cdot\vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t\int_F d\vec{f}\cdot\vec{B} = 0$

$$2\pi\rho\,E + \frac{1}{c}\partial_t\,\pi\rho^2(-\alpha t) = 0$$

$$\Rightarrow E = \frac{\alpha\rho}{2c}$$

Bsp (integrale Max 1)

homogen geladener Draht (∞ lang + dünn, $\sigma = \frac{\text{Ladung}}{\text{Länge}}$). $|\vec{E}(\vec{r})| = E(\rho) = ?$

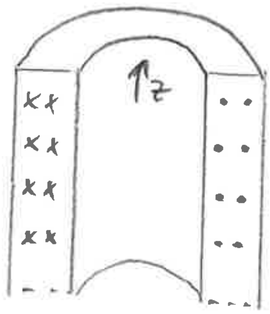


∫Max1: $\oint_F d\vec{f}\cdot\vec{E} = 4\pi\int_V d^3r\,\rho$

$$h\,2\pi\rho\,E = 4\pi h\sigma$$

$$\Rightarrow E = 2\sigma/\rho$$

Bsp (integrale Max 4)

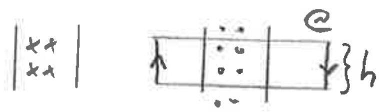


Magnetfeld im Innern einer Spule

(∞ lang, Strom I, Windungszahl pro Länge: N)

∫Max4: $\oint_C d\vec{r}\cdot\vec{B} - (\sim\dot{\vec{E}}) \overset{0}{=} \frac{4\pi}{c}\int_F d\vec{f}\cdot\vec{j}$

aus Symmetriegründen: $\vec{B} = (0,0,B_3)$



$$h B_3 = \frac{4\pi}{c}(-hNI)$$

$$\Rightarrow B_3 = -4\pi NI/c \quad ; \quad \downarrow\downarrow \vec{B}$$

✓ Rechte-Hand-Regel