• <u>Potentiale</u> (die immer existieren)

schreibe $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ — "<u>Vektorpotential</u>" ((nicht eindeutig, aber ex. (s.u. *)))

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \partial_i \varepsilon^{ijk} \partial_j A^k = 0$$

(Max 3) <u>folgt</u>!

$$\Rightarrow \text{(Max 2)}: \quad \vec{\nabla}\times\left(\vec{E} + \dot{\vec{A}}/c\right) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E} + \dot{\vec{A}}/c = -\vec{\nabla}\phi$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}}/c \,, \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}}$$

• Freiheitsgrade? 6 Felder (E_i, B_i) → 4 Potentiale (ϕ, A_i)

8 Maxwell-Gln → 4 Gln (Max 1), ($\overrightarrow{\text{Max 4}}$)

(denn Max 2,3 automatisch erfüllt).

• Potentiale in Max 1,4 einsetzen

(Max 1) $\quad -\Delta\phi - \frac{1}{c}\partial_t \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 4\pi\rho$

(Max 4) $\quad \underbrace{\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})}_{\overset{\text{(bac-cab)}}{=}\ \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \Delta\vec{A}} + \frac{1}{c^2}\left(c\vec{\nabla}\dot{\phi} + \ddot{\vec{A}}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$

<u>def</u> $\quad \Box =: \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta \quad$ <u>d'Alembert-Op.</u>, Box, Quabla

$$\Rightarrow \Box\phi = 4\pi\rho + \frac{1}{c}\partial_t\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\dot{\phi}\right] \qquad \hat{=} \text{ (Max 1)}$$

$$\Box\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} - \vec{\nabla}\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\dot{\phi}\right] \qquad \hat{=} \text{ (Max 4)}$$

⇝ können diese beiden Gln. noch vereinfachen, s.u. (S.86)

(*) <u>ein</u> mögliches $\vec{A}$ ist ($\vec{\nabla}\cdot\vec{B}$ beachtend):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\int_0^y dy'\, B_3(x,y',z) \\ +\int_0^x dx'\, B_3(x',y,z) \\ \int_0^y dy' \left[B_1(x\,y'\,z) + B_1(0\,y'\,z)\right] - \int_0^x dx' \left[B_2(x'\,y\,z) + B_2(x\,0\,z)\right] \end{pmatrix}$$

((check: $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ bilden, $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ einsetzen, $\vec{B}$ herausbekommen))

↳ Ü?!

$\rightsquigarrow$ Eindeutigkeit der Potentiale $\phi, \vec{A}$?

- Eichfreiheit

  wegen $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ ist $\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$ ohne Effekt auf $\vec{B}$

  aber dann $\vec{E} \to -\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}}/c - \vec{\nabla}\dot{\chi}/c$

  $\Rightarrow$ $\vec{E}, \vec{B}$ invariant gegenüber

  $\phi \to \phi - \frac{1}{c}\dot{\chi}$, $\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$, $\chi(\vec{r}, t)$ beliebig

Bem.:
- bei Variation von χ durchlaufen

  $\phi_{neu} = \phi_{alt} - \frac{1}{c}\dot{\chi}$, $\vec{A}_{neu} = \vec{A}_{alt} + \vec{\nabla}\chi$ den "Eichorbit"

- Möglichkeiten, Stellen / Bereiche des Eichorbits festzulegen:

  (a) $\vec{A}$ liegt fest (sofern bei $r \to \infty$ abfallend),

  wenn man $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ = gegeben

  um $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ = wählen ergänzt

  (($\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{neu}$ = gewählt = $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{alt} + \Delta\chi$ nach χ lösen ...))

  (b) ϕ wegeichen ? $\frac{1}{c}\dot{\chi} = \phi_{alt}$ $\rightsquigarrow$ $\chi(\vec{r}, t) = \chi(\vec{r}, 0) + \int_0^t dt' \phi_{alt}(\vec{r}, t')$

  (c) z.B. A_3 wegeichen ? ja, geht analog zu (b)

  $\vec{e}_3 \cdot \vec{A} = 0$; auch $\vec{n} \cdot \vec{A} = 0$ ist möglich

- einige häufig verwendete Eichfixierungen:

Lorentz-Eichung	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\dot{\phi} = 0$
Coulomb-Eichung	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$
temporal gauge	$\phi = 0$
axial gauge	$\vec{n} \cdot \vec{A} = 0$

- Physik (Natur) ist (muss sein) eichinvariant !

35R (geladenes Teilchen in $\vec{E}, \vec{B}$)

das einzige Mechanik-Problem der emm Welt: $m\ddot{\vec{r}} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right)$

→ zugehörige Lagrange-Fkt hat also Rang eines first principles.

Beh: $\boxed{L = \frac{m}{2}\vec{v}^2 - q\phi + q\frac{\vec{v}}{c}\vec{A}}$ (nichtrel. Grenzfall)

s. Ü15 (($\hookrightarrow -mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}$ für Rel., vgl. § 5.3, S. 71))

denn: Bwgln $\frac{d}{dt}\partial_{\dot{q}_i} L = \partial_{q_i} L$ ($q_i : \vec{r}$, $\dot{\vec{r}} \equiv \vec{v}$)

brauchen $\partial_{\vec{v}} L = m\vec{v} + \frac{q}{c}\vec{A}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\partial_{\vec{v}} L = m\dot{\vec{v}} + \frac{q}{c}\left(\dot{\vec{A}} + \underbrace{(\partial_t r_i)\partial_{r_i}}_{\Sigma}\vec{A}\right) \quad ((\text{wg. } \vec{A}(\vec{r}(t),t)))$$

$$= m\dot{\vec{v}} + \frac{q}{c}\left(\dot{\vec{A}} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\right)$$

$$\partial_{\vec{r}} L = -q\vec{\nabla}\phi + q\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{A}\right)$$

$$\Rightarrow \text{Bwgl} \quad m\dot{\vec{v}} = q\left(-\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}}/c\right) + \frac{q}{c}\left[\vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A}) - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\right]$$

$(= \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}))$

$$= q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right) \quad \text{qed}$$

→ gehe nun per $\phi \to \phi - \dot{\chi}/c$, $\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$ zu anderen Potentialen über; dann reflektiert

$$L \to L + \frac{q}{c}\dot{\chi} + \frac{q}{c}\dot{\vec{r}}\cdot\vec{\nabla}\chi = L + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{q}{c}\chi\right)}$$

totale Abl. lässt Bwgln. invariant, vgl. § 2.2 (S. 26)

die Eichinvarianz der Realität.

→ verallg. Impulse $\vec{p} \equiv \partial_{\vec{v}} L = m\vec{v} + \frac{q}{c}\vec{A}$

Hamilton-Fkt $H = \vec{v}\cdot\vec{p} - L = m\vec{v}^2 + \cancel{\frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}} - \frac{m}{2}\vec{v}^2 + q\phi - \cancel{\frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}}$

via $\vec{p}$ ausdrücken $\underline{\underline{H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + q\phi}}$

((diese Hamilton-Fkt wird von Mechanik → QM (ohne Spin) gerettet; in Kombination mit der Regel $\vec{p} \to \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$))

↝ zurück zu den Max 1,4 von S. 83:

- schreibe Max 1,4 mit Potentialen $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}}/c$, $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$
  und in Lorentz-Eichung $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \dot{\phi}/c = 0$

  $$\Rightarrow \quad \Box \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = \frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

  (inhomogene) Wellengl.

  ↳ Lsg: s. später
  ((retardierte Potentiale))

- Nachtrag: oft werden die Max auch in integraler Form benutzt (wenn verwendbar, dann rentabel; "first principles" sind die lokalen Max von der Postkarte, S. 74):

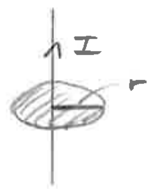
  ((Satz von Gauss $\int_V d^3r\, \vec{\nabla}\cdot\vec{\blacksquare} = \oint_S d\vec{f}\cdot\vec{\blacksquare}$

  Satz von Stokes $\int_S d\vec{f}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{\blacksquare}) = \oint_{\partial} d\vec{r}\cdot\vec{\blacksquare}$))

$$\Rightarrow \quad \oint_S d\vec{f}\cdot\vec{E} = 4\pi\int_V d^3r\,\rho \quad , \quad \oint_{\partial} d\vec{r}\cdot\vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t\int_S d\vec{f}\cdot\vec{B} = \vec{0}$$

$$\oint_S d\vec{f}\cdot\vec{B} = 0 \quad , \quad \oint_{\partial} d\vec{r}\cdot\vec{B} - \frac{1}{c}\partial_t\int_S d\vec{f}\cdot\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\int_S d\vec{f}\cdot\vec{j}$$

Bsp



$$B\cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c}\cdot I$$

⇒ s. auch Ü37, Ü40