- <u>Max $\Rightarrow$ Coulomb</u> (wie man Max per Ansatz löst)

Q auf Metallkugel (R) : $\rho = \frac{Q}{4\pi R^2}\delta(r-R)$, $\vec{j}=0$ (s. S. 76)

"immer Max 1–4 abarbeiten!" :

Statik $\Rightarrow$ (Max 3,4) abgekoppelt von (Max 1,2) $\Rightarrow$ $\vec{B}=\vec{0}$

<u>Ansatz</u> $\vec{E} = \vec{r}\, f(r)$ $\Rightarrow$ (Max 2) ? (malen!) $\vec{0}=\vec{0}$ ✓✓

in (Max 1) einsetzen : $\vec{\nabla}\cdot\begin{pmatrix} xf \\ yf \\ zf \end{pmatrix} = 3f + rf' \overset{!}{=} \frac{Q}{R^2}\delta(r-R)$

(($\partial_x r = \frac{x}{r}$))

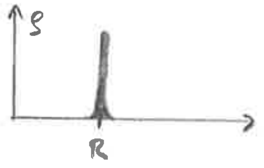
<u>Ans</u> $f(r) = r^\lambda g(r)$ $\Rightarrow$ $3r^\lambda g + \lambda r^\lambda g + r^{\lambda+1} g' = \frac{Q}{R^2}\delta(r-R)$

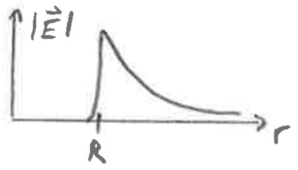
$\rightarrow r^2$ wegen δ erlaubt

wähle $\lambda=-3$: $g' = Q\,\delta(r-R)$

$\Leftrightarrow$ $g = Q\,\theta(r-R) + \text{const}$

$\Rightarrow$ $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{Q}{r^2}\theta(r-R) + \cancel{\vec{e}_r \frac{\text{const}}{r^2}}$ $= 0$, da am Ursprung keine Punktquelle ist





((es folgt die "Coulomb"-Kraft $\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\overset{0}{\vec{B}}) = \vec{e}_r \frac{qQ}{r^2}\theta$ ✓✓))

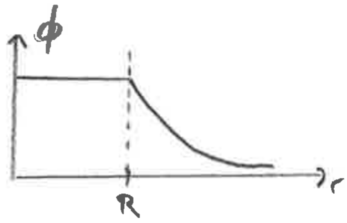
(auf Probeldg q

$\rightsquigarrow$ kann man $\vec{E} \equiv -\vec{\nabla}\phi(r) = -\vec{e}_r\,\phi'(r)$ schreiben?

((dann $\vec{F} = -\vec{\nabla}V(r)$, mit Potential $V(r) = q\phi(r)$))

$\Rightarrow$ geht, mit

$\phi(r) = \begin{cases} Q/r & \text{außen} \\ Q/R & \text{innen} \end{cases}$ Coulomb-Potential



(wegen Stetigkeit bei $r=R$, damit grad kein δ produziert ($\vec{E}$ hat keins!))

6.3 Potentiale, Eichfreiheit

→ unsere Beobachtung im letzten Bsp ist allgemein:

(vgl. §1.2, S.7) $\vec{F} = -\vec{\nabla} V \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$

((auf S.80 hatten wir (Max 2) $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \cancelto{0}{\dot{\vec{B}}/c} = \vec{0}$ Statik!))

⇒ in Elektrostatik existiert wegen $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$

stets ein "elektrostatisches Potential" oder "Skalarpotential"

ϕ, mit $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ ((für einfach zusammenhängende Gebiete))

(analog zu S.8:) $\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{E}(\vec{r}')$

Integral ist unabhängig vom Integrationsweg!

- benutze dies in (Max 1):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \Longrightarrow \vec{\nabla}^2 \phi = -4\pi\rho$$ Poisson-Glg

(manchmal $\vec{\nabla}^2 \equiv \Delta$ "Laplace-Op.")

im Vakuum ($\rho = 0$): $\vec{\nabla}^2 \phi = 0$ Laplace-Glg

- für die Metallkugel von S.80:

$$\Delta\phi = -4\pi Q \underbrace{\frac{1}{4\pi R^2}\delta(r-R)}$$

ist wegen $\int d^3r \, \frac{1}{4\pi R^2}\delta(r-R) = 1$

zu $R \to 0$ ein $\delta(\vec{r})$-Darstellung

$$\Rightarrow \Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{r})$$

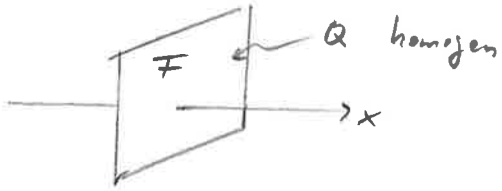
$$\Leftrightarrow \Delta\left(-\frac{1}{4\pi r}\right) = \delta^{(3)}(\vec{r})$$ (($-\frac{1}{4\pi r}$ ist Greensche Fkt (s. später) von Δ))

- ϕ-Differenzen nennt man auch "Spannung"

$[\phi] = [x][\vec{E}]$; ((im SI: $[\phi] = m \cdot \frac{N}{C} = V =$ Volt))

Bsp (Kondensator)

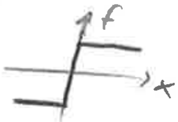
1 Platte: $\rho = \frac{Q}{F}\,\delta(x)$



müssen (Max I) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{4\pi Q}{F}\,\delta(x)$ lösen

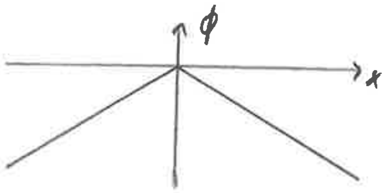
Ansatz: $\vec{E} = \vec{e}_1 f(x) \quad\Rightarrow\quad f'(x) = \frac{4\pi Q}{F}\,\delta(x)$

$\Rightarrow f = \frac{4\pi Q}{F}\,\Theta(x) + \text{const}$; Symmetrie $\rightsquigarrow$ $C = -\frac{2\pi Q}{F}$



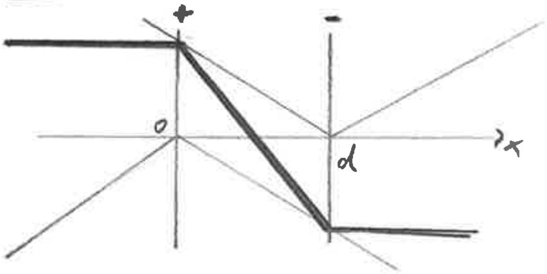
$\Rightarrow \vec{E} = \frac{2\pi Q}{F}\,\mathrm{sign}(x)\,\vec{e}_1 \overset{!}{=} -\partial_x \phi(x)\,\vec{e}_1$

$\Rightarrow \phi(x) = -\frac{2\pi Q}{F}\,|x|$



Potential pos. Platte

2 Platten:



nur Superposition!

Spannung $= 2\cdot\frac{2\pi Q}{F}\cdot d$

Kapazität $= \frac{Q}{\text{Spannung}} = \frac{F}{4\pi d}$

- Superposition (allg.)

$$\mathrm{Max}\,(\rho_I, \vec{j}_I;\ \vec{E}_I, \vec{B}_I)$$
$$\mathrm{Max}\,(\rho_{II}, \vec{j}_{II};\ \vec{E}_{II}, \vec{B}_{II})$$

Max linear: $\mathrm{Max}\,(\rho_I+\rho_{II}, \dots;\ \vec{E}_I+\vec{E}_{II}, \dots)$

z.B. $\phi(\vec{r}) = \sum_a \frac{q_a}{|\vec{r}-\vec{r}_a|} \underset{\text{Kont.-Limes}}{=} \int_V d^3\vec{r}\,'\,\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$

$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_a q_a \frac{\vec{r}-\vec{r}_a}{|\vec{r}-\vec{r}_a|^3} = \int_V d^3\vec{r}\,'\,\rho(\vec{r}\,')\,\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$

$\Bigg\}$ Skalarpot und el. Feld von (vielen) Punktladungen.