6.2 Maxwell-Gleichungen

- die auf S. 74 angegebenen Maxwell-Gln (1)-(4) benutzen ein spezifisches Einheitensystem:

  Gaußsches bzw cgs (cm, g, s) Maßsystem;

  → dabei werden keine neuen Einheiten für die ED eingeführt, sondern man def. "Ladung" durch die mechanischen Einheiten (cm, g, s):

  (Max 1): $[\vec{E}]/[x] = [q]/[x]^3 \Rightarrow [\vec{E}] = [q]/[x]^2$

  (Lorentz): $[\vec{F}] = [m \frac{x}{t^2}] = [q][\vec{E}] = [q]^2/[x]^2 \Rightarrow [q^2] = [m \frac{x^3}{t^2}]$

  $\Rightarrow [\vec{E}^2] = [\frac{m}{x t^2}]$

- es gibt andre (als das Gaußsche) Maßsysteme;

  allg. $\underbrace{\vec{E}}_{\text{Gauß}} = \sqrt{k\varepsilon_0}\,\underbrace{\vec{E}^*}_{\text{anderes Maßsystem}}, \quad \vec{B} = \sqrt{\frac{k}{\mu_0}}\,\vec{B}^*, \quad (q, \rho, \vec{j}) = \frac{1}{\sqrt{k\varepsilon_0}}(q^*, \rho^*, \vec{j}^*)$

  dann

$$\boxed{\begin{aligned} &\operatorname{div}\vec{E}^* = \frac{4\pi}{k\varepsilon_0}\rho^*, && \operatorname{rot}\vec{E}^* + \frac{\dot{\vec{B}}^*}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0 c^2}} = 0 \\ &\operatorname{div}\vec{B}^* = 0, && \operatorname{rot}\vec{B}^* - \dot{\vec{E}}^*\sqrt{\frac{\varepsilon_0\mu_0}{c^2}} = \frac{4\pi}{kc}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\vec{j}^* \\ &\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q^*\left(\vec{E}^* + \frac{\vec{v}}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0 c^2}} \times \vec{B}^*\right) \end{aligned}}$$

- einige Maßsysteme: [vgl. auch Jackson, Anhang !!]

	ε_0	μ_0	k
Gauß	1	1	1
Heaviside-Lorentz	1	1	4π
SI	$\frac{1}{\mu_0 c^2}$	$\frac{4\pi}{10^7}\frac{N}{A}$	4π

(ε_0: "Dielektrizitätskonstante"
μ_0: "Vakuumpermeabilität")

N = Newton $= \frac{J}{m} = \frac{Ws}{m} = \frac{kg\, m}{s^2}$

W = Watt = VA = Volt · Ampere

(C = Coulomb = As)

anschaulicher Inhalt der Max

- (Max 1) $\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho$: wo Ladung, da $\vec{E}$-Quellen

, außen $\sim \frac{1}{r^2}$

- (Max 2) $\operatorname{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}}/c$: wo $\vec{B}$-Abnahme, da Wirbelstärke

lange Spule,
$\dot{I} < 0$, $-\dot{\vec{B}}$ nach oben

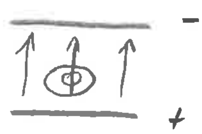
da außen $B, \dot{B} = 0$
muss E langsam abnehmen,
sonst große Rotation am Rand

- (Max 3) $\operatorname{div}\vec{B} = 0$: keine $\vec{B}$-Quellen;
$\vec{B}$-Feldlinien geschlossen!

- (Max 4) $\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \dot{\vec{E}}/c$: wo $\vec{j}$ und/oder $\vec{E}$-Zunahme,
da $\vec{B}$-Wirbel

Draht,
$\vec{j}$ nach oben

, Kondensator bei Aufladung



"enge" ED betrachte im Folgenden (bis auf Widerruf)
$\rho(\vec{r},t)$, $\vec{j}(\vec{r},t)$ als bekannt und
Max 1–4 als Gln. für $\vec{E}, \vec{B}$

((Newton außen vor: keine Rückwirkungen Felder → Ladungen))

lesen als Paare

	ständig gültig	Zukunfts-Regeln (Bwgln.)	
	Max 1	Max 2	Elektrostatik
	Max 3	Max 4	Magnetostatik

(Statik entkoppelt)

homogene Max

inhomogene (materielle) Max

erste Folgerungen aus Max

- **Max ⇒ Kontinuitätsglg.**

wenn (wie versprochen, s. S. 74) Theorie vollständig, dann muss die Kontinuitätsglg. der emm Welt aus Max folgen:

$$\mathrm{div}\,(\text{Max }4):\quad \underbrace{\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{B}}_{=\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\ldots)=0} = \frac{4\pi}{c}\Big(\mathrm{div}\,\vec{j} + \underbrace{\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{div}\,\dot{\vec{E}}}_{(\text{Max }1)^{\cdot}\ =\ \dot{\rho}}\Big)$$

qed

- **Welt-Anfangsbedingungen?**

Max 1–4: 8 Gln. für 6 Unbekannte $(\vec{E},\vec{B})$?

Max 1, 3 herleitbar aus Max 2, 4 ?

$$\mathrm{div}\,(\text{Max }2):\quad 0 = \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t\,\mathrm{div}\,\vec{B}$$

$$\Rightarrow \mathrm{div}\,\vec{B} = \mathrm{const}_t = \mathrm{div}\,\vec{B}\,\big|_{\text{big bang}}$$

und bei ladungserhaltendem Input $(\dot{\rho} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0)$

$$\mathrm{div}\,(\text{Max }4):\quad 0 = \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{c}\big(4\pi\,\mathrm{div}\,\vec{j} + \mathrm{div}\,\dot{\vec{E}}\big)$$

$$= \frac{1}{c}\partial_t\big(\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{E} - 4\pi\rho}\big)$$

$$\Rightarrow \mathrm{const}_t = \big(\mathrm{div}\,\vec{E} - 4\pi\rho\big)\big|_{\text{big bang}}$$

- **Eindeutigkeit von $\vec{E},\vec{B}$ aus Max 1–4 ?**

Beh.: ja, wenn keine Ursachen bei $r=\infty$

– Elektro/Magnetostatik: $\mathrm{div}\,\vec{A}$ = gegeben, $\mathrm{rot}\,\vec{A}$ = gegeben (Ẽ oder B̃)

⇒ hat nur eine in ∞ verschwindende Lsg $\vec{A}$ (Theorem der Vektoranalysis)*

⤳ Ansätze erlaubt beim Lösen von Max 1–4 !

– Dynamik (z.B.: em Wellen entstehen), s. später

$$^{*}\ \vec{A}(\vec{r}) = \int\frac{d^3r'}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\big(\mathrm{rot}\,\vec{g}(\vec{r}\,') - \mathrm{grad}\,g(\vec{r}\,')\big) + \vec{C},\quad \Delta\vec{C} = \vec{0}\ \Rightarrow\ \vec{C} = \vec{0}$$