5.3 Relativistische Mechanik

hier: kurzer Einblick in Umformulierung der klass. Mechanik mit 4-Vektoren etc.

Ziel: Verallg., die auch für $|\vec{v}| \approx c$ gültig ist:
Grundgesetze der Physik müssen in allen Inertialsystemen dieselbe Form haben (Relativitätsprinzip)

$\rightsquigarrow$ mehr: Theo II

z.B. $A'^{\mu} = B'^{\mu} \Leftrightarrow 0 = A'^{\mu} - B'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(A^{\nu} - B^{\nu}) \overset{\exists \Lambda^{-1}}{\Leftrightarrow} A^{\nu} = B^{\nu}$

$\Rightarrow$ schreibe Grundgesetze als Gleichungen zwischen 4-Vektoren, 4-Skalaren etc.

Ausgangspkt z.B. Hamiltonsches Prinzip (s. §2.2, S.26):

- Wirkung S sei extremal
  ↑ reelle Zahl → sollte 4-Skalar sein

nichtrel.: $S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L$ mit $L = \frac{m}{2}\vec{v}^2$ $\quad (\vec{v} = \dot{\vec{x}})$

Raumzeit homogen $\Rightarrow$ $S(\cancel{\vec{x}}, \cancel{t})$

wissen aus §5.2, dass $d\tau = \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}\, dt$ L-invariant ist

"Herzschlag" des Teilchens

Ansatz $S = -\alpha \int_1^2 d\tau$, α eine (zu best.) Konstante

$$\overset{!}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt\, L \quad \text{mit} \quad L = -\alpha\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} \approx -\alpha\left(1 - \frac{\vec{v}^2}{2c^2} + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right)\right)$$

Ⓐ Ⓑ

Ⓐ Konstante hat keinen Einfluss auf EL-Gln (vgl. S.26)

Ⓑ muss nichtrel. Limes ergeben! $\Rightarrow \alpha = mc^2$

$$\Rightarrow L = -mc^2\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} \qquad \left(\equiv -mc^2\sqrt{}\right)$$

- betrachte kanonisch konjugierten Impuls (s. §2.4, S.32)

$$p^i = \partial_{\dot{x}^i} L = -mc^2 \partial_{v^i} \sqrt{1-\tfrac{1}{c^2}\sum_j v^j v^j} = -mc^2 \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{\sqrt{\ }}\left(-\tfrac{1}{c^2} 2 v^i\right)$$
$$= \frac{m v^i}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}$$

((check: nicht rel. Limes $p^i \approx m v^i (1 + \mathcal{O}(v^2/c^2))$ ✓))

- betrachte Energie (s. §2.4, S.31)

$$E = \sum_i p^i \dot{x}^i - L = \frac{m\vec{v}^2}{\sqrt{\ }} + mc^2 \sqrt{\ } = \frac{m}{\sqrt{\ }}(v^2 + c^2 - v^2)$$
$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}$$

((check: $E \approx mc^2 + \frac{m}{2}\vec{v}^2 + \mathcal{O}(v^4/c^4) \equiv E_{Ruhe} + E_{kin} + \dots$))

- basteln nun einen 4-Vektor aus E, p^i:

$u = \frac{1}{\sqrt{\ }}\begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$ war 4-Vektor (vgl. §5.2, S.68)

$$\Rightarrow \underline{\text{def}} \quad \underbrace{p}_{\text{4-Vektor}} \equiv \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \frac{m}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}\begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} = m u$$

u – 4-Vektor, m – 4-Skalar (Ruhemasse)

Eigenschaften von p^μ

- $p^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 = m^2 u^2 = m^2 c^2 \quad \Leftrightarrow \quad E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2$

$$\Leftrightarrow E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2 c^2} = mc^2 \sqrt{1 + \vec{p}^2/m^2c^2} \approx mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{(\vec{p}^2)^2}{8m^3c^2} + \mathcal{O}(p^6)$$

- Geschw. $\vec{v}$ aus p^μ berechnen?

aus p-def.: $\vec{v}/c = \vec{p}/p^0 = \frac{\vec{p}c}{E}$

sowie $\vec{\nabla}_{\vec{p}} E = \sum_i \vec{e}_i \partial_{p^i} \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2} = \sum_i \vec{e}_i \frac{1}{2}\frac{2p^ic^2}{E} = \frac{\vec{p}c^2}{E}$

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{\nabla}_{\vec{p}} E$ ((und $|\vec{v}| \to c$ wenn $|\vec{p}| \to \infty$))

- $E, \vec{p}$ erhalten $\Leftrightarrow$ p^μ erhalten

$k = 10^3$
$M = 10^6$
$G = 10^9$
$T = 10^{12}$
$\vdots$

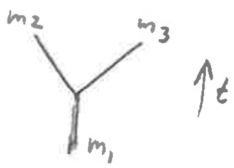
Bsp am LHC (Large Hadron Collider, CERN bei Genf) werden Protonen (Ruhemasse $m = 938\,\frac{\text{MeV}}{c^2} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$) auf Energie 7 TeV(*) beschleunigt; $\underline{\underline{v = ?}}$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Leftrightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{938 \cdot 10^6}{7 \cdot 10^{12}}\right)^2 = 1 - 8{,}98 \cdot 10^{-9}$$

$$\approx 0{,}999\,999\,991 \dots$$

Bsp ein Teilchen zerfällt in 2 andere; $\underline{\underline{E_2}}$ im Ruhesystem von m_1 (CMS)?



4-Impulse: $p_1 = \begin{pmatrix} m_1 c \\ \vec{0} \end{pmatrix}$ $\quad p_2 = \begin{pmatrix} E_2/c \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix}$ $\quad p_3 = \begin{pmatrix} E_3/c \\ \vec{p}_3 \end{pmatrix}$

(a) über E-$\vec{p}$-Erhaltung:

$$p_1 = p_2 + p_3 \Rightarrow (\mu = 1,2,3) \quad \vec{0} = \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \Rightarrow \vec{p}_3 = -\vec{p}_2$$

$$\Rightarrow (\mu = 0) \quad m_1 c = \sqrt{m_2^2 c^2 + \vec{p}_2^{\,2}} + \sqrt{m_3^2 c^2 + \vec{p}_2^{\,2}}$$

$\rightsquigarrow$ nach $\vec{p}_2^{\,2}$ auflösen ... dann in E_2 einsetzen ...

(b) direkter Weg:

$$E_2 = \frac{1}{m_1} m_1 c \frac{E_2}{c} = \frac{1}{m_1} p_1 \cdot p_2$$

$$= \frac{1}{2m_1}\left(p_1^2 + p_2^2 - (p_1 - p_2)^2\right) = \frac{1}{2m_1}\left(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2\right)$$

(*) bisher (2012) erst 4 TeV

$$\Leftrightarrow \frac{v}{c} \approx 1 - 2{,}75 \cdot 10^{-8} \approx 0{,}999\,999\,97 \dots$$