5.2 Vierervektoren

→ brauchen eine gute/elegante Notation für Spez. Rel.

- def $dx \equiv \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}$ mit $dx^0 \equiv c\,dt$

dx ist ein 4-Vektor, mit Komponenten dx^μ, $\mu \in \{0,1,2,3\}$

Vereinbarung: griechische Indizes laufen von $0 \ldots 3$
lateinische Indizes laufen von $1 \ldots 3$

- schreibe Lorentz-Trafo als

$dx' = \Lambda\, dx$, mit $\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \vdots & & \ddots & \end{pmatrix}$

Matrixschreibweise
Komponentenschreibweise

$dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, dx^\nu$ (Summenkonvention; jetzt für Indizes, die einmal unten und einmal oben vorkommen)

- allg.: $A = \begin{pmatrix} A^0 \\ \vdots \\ A^3 \end{pmatrix}$ ist ein 4-Vektor, falls sich die Komponenten von A^μ wie $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$ transformieren.

⇝ Frage: kann man 4-Skalare konstruieren,
d.h. Größen, die unter Λ invariant sind?

((Erinnerung: für Drehungen: $\vec{x}$ Vektor $\Rightarrow \vec{x}^2 = \vec{x}\cdot\vec{x}$ Skalar;
jetzt soll aber $ds^2 = (dx^0)^2 - d\vec{x}\cdot d\vec{x}$ invariant bleiben))

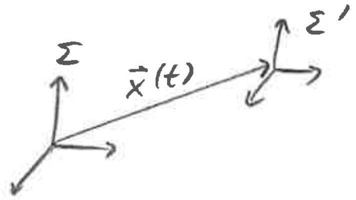
- def $A_0 \equiv A^0$, $A_i \equiv -A^i$ (für $i = 1,2,3$)

$A^2 \equiv A^\mu A_\mu = (A^0)^2 - \vec{A}\cdot\vec{A}$ Viererskalarprodukt

d.h. ds^2 ist ein 4-Skalar
i.A. sind 4-Skalarprodukte A^2 4-Skalare.

Bem.: das 4-Skalarprodukt ist nicht positiv definit!

Bsp (Eigenzeit eines Teilchens mit Bahnkurve $\vec{x}(t)$)



betrachte zwei Ereignisse; auf Teilchen-fester Uhr z.B. $\equiv a$, $\equiv b$

in Σ: Geschw. zwischen a,b sei konstant
Zeitintervall: dt
Abstand: $d\vec{x} = \dot{\vec{x}}(t)\,dt = \vec{v}(t)\,dt$

in Σ': Zeitintervall: $d\tau$, τ = "Eigenzeit"
Abstand: $d\vec{x}' = 0$

ds^2 ist invariant $\Rightarrow$ $ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 = c^2 dt^2 - \vec{v}^2 dt^2$

$$\Leftrightarrow \quad d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2(t)}{c^2}}$$

$\Rightarrow$ Eigenzeitintervall $d\tau \equiv \sqrt{\frac{ds^2}{c^2}}$ ist 4-Skalar

Bsp def. Vierergeschwindigkeit

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}\begin{pmatrix} c \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}$$

u^μ ist 4-Vektor, weil dx^μ 4-Vektor und $d\tau$ 4-Skalar ist.

Bsp $u^2 = u^\mu u_\mu = \frac{1}{1-\vec{v}^2/c^2}(c^2 - \vec{v}^2) = c^2$ ist 4-Skalar

Bsp

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A^\mu + B^\mu)(A_\mu + B_\mu) = A^2 + B^2 + A^\mu B_\mu + B^\mu A_\mu \\ &= A^2 + B^2 + A^0 B^0 - \vec{A}\cdot\vec{B} + B^0 A^0 - \vec{B}\cdot\vec{A} \\ &= A^2 + B^2 + 2\,A\cdot B\end{aligned}$$

invariant

$\Rightarrow$ $A\cdot B$ $(= A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu)$ ist invariant $\forall$ 4-Vektoren A, B

def A^μ heisst kontravarianter 4-Vektor
A_μ heisst kovarianter 4-Vektor

Verhalten unter Lorentz-Trafo (vgl. S. 67): $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$

→ wie werden kovariante 4-Vektoren transformiert?

sei $A'_\mu \equiv A_\alpha M^\alpha{}_\mu$

dann ist $A'\cdot B' = A'_\mu B'^\mu = A_\alpha M^\alpha{}_\mu \Lambda^\mu{}_\beta B^\beta$

(Invarianz) → $\overset{!}{=} A\cdot B = A_\alpha B^\alpha \quad \forall A, B$

$\Rightarrow M^\alpha{}_\mu \Lambda^\mu{}_\beta \overset{!}{=} \delta^\alpha{}_\beta \equiv \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha=\beta \\ 0 & \text{für } \alpha\neq\beta \end{cases}$ (Kronecker-Delta)

Komponentenschreibweise

Matrixschreibweise

$M\Lambda \overset{!}{=} \mathbb{1} \quad \Leftrightarrow \quad M \overset{!}{=} \Lambda^{-1}$

⇒ kovariante Vektoren transformieren sich als $A'_\mu = A_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$

→ Verallgemeinerung: Vierertensoren

- wenn $T^{\mu\nu}$ wie $A^\mu B^\nu$ transformiert, nennt man T einen kontravarianten Tensor zweiter Stufe

- kovariante Tensoren werden wie kovariante Vektoren gebaut: (vgl. S. 67)
  Minuszeichen im räuml. Teil

  $T_{ij} = -T^i{}_j = -T_i{}^j = +T^{ij}$

  $T_{0i} = T^0{}_i = -T_0{}^i = -T^{0i}$

  kovariante Tensoren transformieren dann wie $A_\mu B_\nu$

- Symm/Antisymm eines Tensors ($T^{\mu\nu} = \pm T^{\nu\mu}$) ist invariant:

  $T'^{\nu\mu} = \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\mu{}_\alpha T^{\beta\alpha} = \pm \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\mu{}_\alpha T^{\alpha\beta} = \pm T'^{\mu\nu}$

- Kontraktion $T^\mu{}_\mu$ gibt einen 4-Skalar

- Kronecker-Delta ist ein invarianter Tensor, denn:

  $\delta'^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\alpha (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu \delta^\alpha{}_\beta = \Lambda^\mu{}_\alpha (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\nu = (\Lambda\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$

→ metrischer Tensor

def $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- es ist $\eta_{\mu\nu} \neq \delta_{\mu\nu}$, $\eta^{\mu\nu} \neq \delta^{\mu\nu}$
- es gilt $A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$, $A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu$, $A^2 = A^\mu \eta_{\mu\nu} A^\nu$
- betrachte L.-Trafo eines kovar. Vektors (vgl. S. 69)

$$A'_\mu = A_\alpha (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu$$

jetzt
$$\overset{!}{=} \eta_{\mu\nu} A'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta A^\beta = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta \eta^{\beta\alpha} A_\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta \eta^{\beta\alpha} = \eta^{\alpha\beta} \Lambda^\nu{}_\beta \eta_{\nu\mu}$$

Komponentenschreibweise

Matrixschreibweise

$$\boxed{\Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta}$$

((könnten dies auch als Def. von Λ nehmen))

- vgl. mit Drehmatrix: $R^T R = \mathbb{1} \Rightarrow R^{-1} = R^T$

d.h. $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & R \end{pmatrix}$ ist Lorentz-Trafo, denn:

$$\eta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}^T \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -R^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^T \end{pmatrix}$$

$$\overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} \quad ✓✓$$