5. Spezielle Relativitätstheorie: erster Eindruck

→ bisher in klass. (nicht-relativistischer) Mechanik:
absolute Zeit t (Existenz wurde vorausgesetzt

⇝ nun: "Ereignisse" in der Raum-Zeit, $(\vec{x}, t)$ vs $(\vec{x}', t')$

5.1 Lorentz-Transformation

betrachte Galilei-Trafo (vgl. §1.3) zwischen Inertialsystemen
mit der Eigenschaft $(\vec{x}, t) = (\vec{0}, 0) \Leftrightarrow (\vec{x}', t') = (\vec{0}, 0)$

→ d.h. Boosts $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{u}t$ und Drehungen $\vec{x}' = R\vec{x}$

Raum-Zeit

Ereignis ≡ physikalischer Prozess bei $(\vec{x}, t)$ bzw. $(\vec{x}', t')$

- laut Galilei-Trafo gilt für einen Boost:

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{x}' = \vec{x} - \vec{u}t \\ t' = t \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}' = \partial_{t'}\vec{x}' = \partial_t(\vec{x} - \vec{u}t) = \vec{v} - \vec{u}$$

dies würde auch für Licht gelten

beobachtet bei $(\vec{x}, t)$ bzw. $(\vec{x}', t')$

erzeugt bei $(\vec{0}, 0)$

$\Rightarrow v' = c' \neq c = v$ ↯

⇝ dies steht im Widerspruch zu

(a) Experimenten, z.B. Michelson/Morley (1887)

(b) Maxwell-Gln. (s. Elektrodynamik; alle elektromagn. Wellen haben in allen Inertialsystemen dieselbe Geschwindigkeit $\equiv c$)

⇝ Galilei-Trafo kann also nicht richtig sein!

- neues Prinzip (Einstein, ca. 1905):

für Licht gilt $c = \left|\frac{d\vec{x}'}{dt'}\right| = \left|\frac{d\vec{x}}{dt}\right|$ $\begin{pmatrix} \vec{x}_b - \vec{x}_a \\ t_b - t_a \end{pmatrix}$ Messung durch zwei Ereignisse, z.B. Erzeugung + Beobachtung

$\Leftrightarrow$ $|d\vec{x}'| = c\,dt'$
$|d\vec{x}| = c\,dt$

$\Rightarrow$ $c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 = c^2 dt'^2 - d\vec{x}'^2 \equiv ds^2$ Abstand sei invariant.

lineare Trafos $\begin{pmatrix} c\,dt' \\ d\vec{x}' \end{pmatrix} = \Lambda_{4\times4} \begin{pmatrix} c\,dt \\ d\vec{x} \end{pmatrix}$, die diese Bedingung erfüllen, heissen Lorentz-Transformationen

Bsp: eine Drehung $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ mit $R^T R = \mathbb{1}_{3\times3}$

ist eine Lorentz-Trafo, denn:

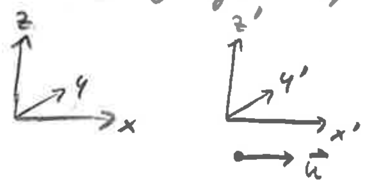
$\begin{pmatrix} c\,dt' \\ d\vec{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,dt \\ R\,d\vec{x} \end{pmatrix} \Rightarrow c^2 dt'^2 - d\vec{x}'^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^T \underbrace{R^T R}_{\mathbb{1}} d\vec{x}$
$= c^2 dt^2 - d\vec{x}^2$ qed

- Boosts müssen verallgemeinert werden:

betrachte Boost in Richtung $\vec{u}$

$\hat{=}$ Drehung von $\vec{u}$ auf $|\vec{u}|\,\vec{e}_1$, dann Boost in $\vec{e}_1$-Richtung, dann Rückdrehung

$\rightsquigarrow$ oBdA genügt es, Boosts in x-Richtung zu betrachten;



$$\begin{pmatrix} c\,dt' \\ dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} A & B & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} c\,dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

((in den Richtungen $\perp \vec{u}$, d.h. y, z, passiert nichts $\rightarrow \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}$; Richtungen $\parallel$ und $\perp \vec{u}$ mischen nicht $\rightarrow \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}$))

$A, B, C, D \in \mathbb{R}$ sind Fkt'n der Boost-Geschw. $u \equiv |\vec{u}|$

$\rightsquigarrow$ müssen nun $A, \dots, D$ bestimmen:

(a) wegen $\begin{pmatrix} c\,dt' \\ dx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\,c\,dt + B\,dx \\ C\,c\,dt + D\,dx \end{pmatrix}$ gilt für den Abstand

$$\begin{aligned} ds^2 &= (A\,c\,dt + B\,dx)^2 - (C\,c\,dt + D\,dx)^2 \\ &= (A^2 - C^2)\,c^2 dt^2 + (B^2 - D^2)\,dx^2 + 2(AB - CD)\,c\,dt\,dx \\ &\overset{!}{=} c^2 dt^2 - dx^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow A^2 - C^2 \overset{!}{=} 1 \,, \quad D^2 - B^2 \overset{!}{=} 1 \,, \quad AB - CD \overset{!}{=} 0$

nenne $A \equiv \gamma$; $\gamma^2 = 1 + C^2 \geq 1$, insbesondere $\gamma \neq 0$

$B = \frac{CD}{\gamma}$, $D^2 - B^2 = D^2\left(1 - \frac{C^2}{\gamma^2}\right) = D^2\left(1 - \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}\right) = \frac{D^2}{\gamma^2} = 1$

$\Rightarrow D = \pm\gamma$

(b) für $u \to 0$ muss natürlich $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gelten.

also ist wegen $\gamma^2 \geq 1$ auch immer $\gamma \geq 1$ (und nicht $\gamma \leq -1$).

ebenfalls $D = +\gamma$

sowie $B = \frac{CD}{\gamma} = C = \pm\sqrt{\gamma^2 - 1}$

(c) betrachte $dx = 0$ (zwei Ereignisse am Ursprung von Σ)

$\rightsquigarrow$ es gilt dann $dx' = -u\,dt'$ (da sich Σ mit $-\vec{u}$ bzgl. Σ' bewegt)

$dx = 0$: $\left\{\begin{aligned} c\,dt' &= A\,c\,dt \\ dx' &= C\,c\,dt \end{aligned}\right\}$ $\Rightarrow \frac{C}{A} = \frac{dx'}{c\,dt'} = -\frac{u}{c} \equiv -\beta < 0$

$\rightsquigarrow$ wegen (b) ist $(A = \gamma \geq 1)$ dann $C = -\sqrt{\gamma^2 - 1} < 0$

$\rightsquigarrow$ wegen $C = -\beta A = -\beta\gamma$ folgt $(C^2 = C^2)$

$\beta^2\gamma^2 = \gamma^2 - 1 \Leftrightarrow 1 = \gamma^2(1 - \beta^2) \Rightarrow \gamma = +\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

$\Rightarrow$ insgesamt also $\left(\beta = \frac{u}{c}\right)$

$A = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

$C = -\beta\gamma$

$B = C = -\beta\gamma$

$D = \gamma$

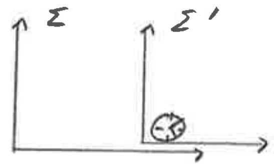
$\Leftrightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bem.: • Drehmatrix $R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \det R = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

• Boostmatrix $B = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2} = 1$

$\rightsquigarrow$ physikalische Konsequenzen:

• Zeitdilatation



eine Uhr ruhe am Σ'-Ursprung,
also $dx' = 0$; wie lautet die Beziehung zwischen dt, dt'?

$$\begin{pmatrix} c\,dt' \\ dx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,dt \\ dx \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{es ist} \quad \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \quad (\beta \to -\beta)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c\,dt \\ dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,dt' \\ dx' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (1.\text{Z.}) \quad c\,dt = \gamma c\,dt' + \beta\gamma \underbrace{dx'}_{=0} \quad \Leftrightarrow \quad dt = \gamma\, dt' \overset{\gamma \geq 1}{\geq} dt'$$

$\Rightarrow$ d.h. die bewegte Uhr geht von Σ aus gesehen langsamer!

• Längenkontraktion

ein Stab ruhe in Σ', mit Ruhelänge $L' = dx'$.
eine Messung der Stablänge bzgl. Σ, mit $dt = 0$ gibt:

$$dx' = \gamma\, dx \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{dx'}{\gamma} = \frac{L'}{\gamma} \leq L'$$

$\Rightarrow$ d.h. der bewegte Stab scheint bzgl. Σ verkürzt!

Bem.: • Abstände mit $ds^2 = 0$ heissen "lichtartig"

• Abstände mit $ds^2 = c^2dt^2 - d\vec{x}^2 > 0$ heissen "zeitartig"
(wegen $|d\vec{x}| < c\,dt$ kann man die Ereignisse mit Geschw. $\frac{|d\vec{x}|}{dt} < c$ verbinden)

• Abstände mit $ds^2 < 0$ heissen "raumartig"
(solche Ereignisse können einander nicht kausal beeinflussen)