4.3 Phasenraum und Satz von Liouville

betrachte ein System mit s Freiheitsgraden;
verallg. Koord. q_α, kanonisch konj. Impulse p_α
$\Rightarrow$ die Punkte $\Gamma \equiv (q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s)$ bilden den $2s$-dimensionalen
Phasenraum des Systems (vgl. § 4.1)

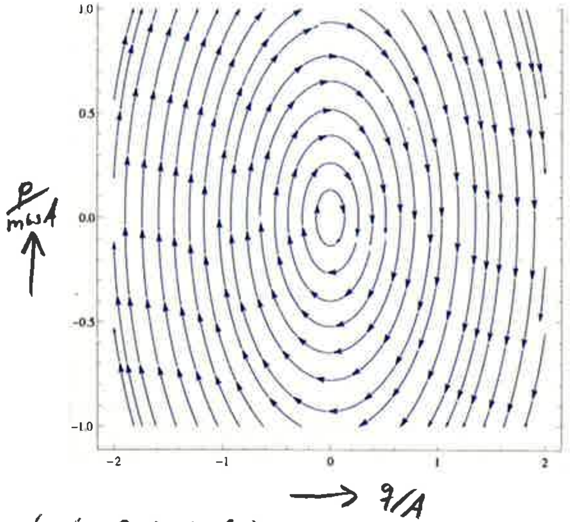
- ein Punkt im Phasenraum $\Leftrightarrow$ ein vollständig charakterisierter Zustand des Systems
- Zeitentwicklung des Systems definiert eine Kurve im Phasenraum, die Phasenraum-Trajektorie

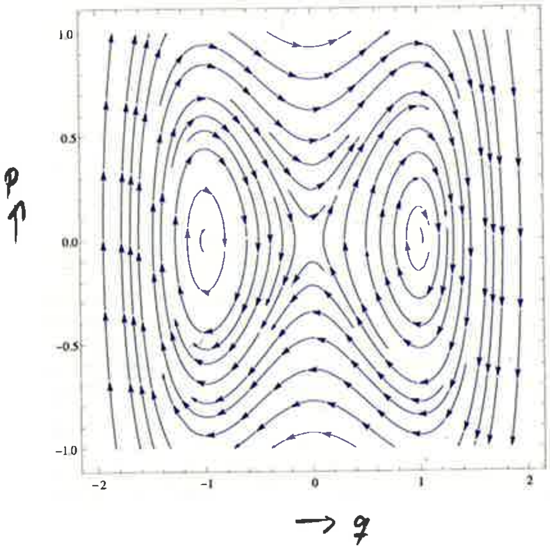
Bsp.: (1-dim H.O.) $\quad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} q^2$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq\,, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

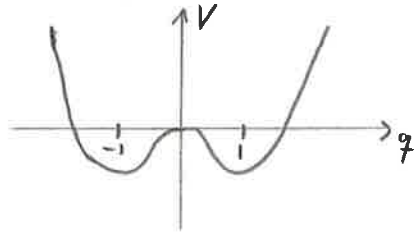
$$\Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{1}{m}\frac{dp}{dt} = -\frac{k}{m} q \equiv -\omega^2 q$$

Lsg $\quad q = A\cos(\omega(t-t_0))$
$\quad\quad p = -m\omega A \sin(\omega(t-t_0))$





← Bsp.: (quartisches Potential)



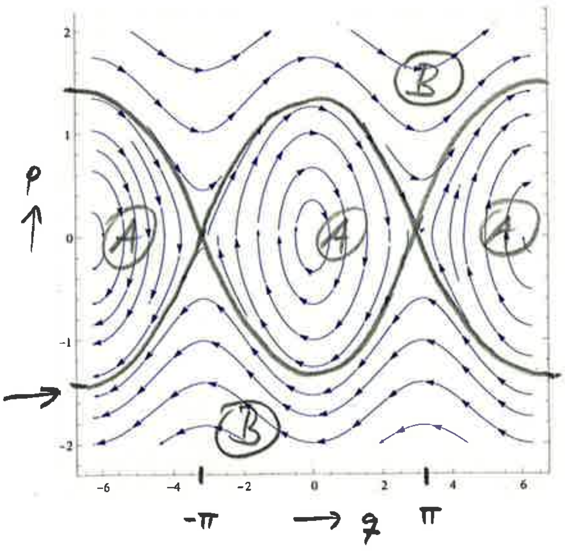
Bsp.: (Pendel; vgl. § 2.3, S. 28)

$q = \varphi\,, \quad L = \frac{m}{2} l^2 \dot{q}^2 + mgl\cos q$

$p = \partial_{\dot q} L = ml^2 \dot q\,, \quad H = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl\cos q$

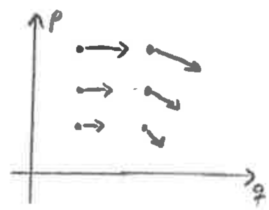
Schwingungen  (A) $\qquad$ Separatrix →

Drehungen  (B)



→ ein Punkt Π im Phasenraum hat die Geschwindigkeit

$$\frac{d\Pi}{dt} = \left(\frac{dq_1}{dt}, \dots, \frac{dq_s}{dt}, \frac{dp_1}{dt}, \dots, \frac{dp_s}{dt} \right)$$
$$= \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_s}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_s} \right) \equiv \vec{\omega}(q,p,t)$$

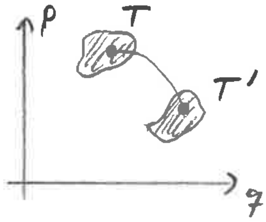


$\vec{\omega}(q,p,t)$ ist $2s$-dim Vektorfeld im Phasenraum;
falls $H(q,p,\cancel{t})$ ⇒ auch $\vec{\omega}(q,p,\cancel{t})$

((s. auch mathPhasenraum.pdf online))

für das Vektorfeld $\vec{\omega}$ gilt (vgl. Kontinuitätsglg $\dot{\rho} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$)

$$\operatorname{div}\vec{\omega} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\omega} = \sum_{a=1}^{s} \frac{\partial \omega_a}{\partial q_a} + \sum_{a=1}^{s} \frac{\partial \omega_{a+s}}{\partial p_a}$$
$$= \sum_{a=1}^{s} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_a \partial p_a} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_a \partial q_a} \right) = 0$$



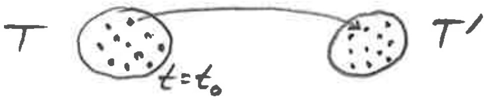
für einen Teilbereich T des Phasenraums: jeder Punkt $\in T$ verschiebt sich aufgrund der Bewgln; also verschiebt sich $T \to T'$.

⇒ Satz von Liouville: das Volumen eines Teilbereichs des Phasenraums, der gemäß den Hamiltonschen Bewgln verschoben wird, bleibt konstant, d.h. $\mathrm{Vol}(T) = \mathrm{Vol}(T')$.

Bem.
- die Form von T ändert sich i.A. bei der Verschiebung
- vgl. auch Bem. auf S. 59: Volumenelement invariant
- interpretiere T z.B. als Menge von nahe beieinanderliegenden Massepunkten mit ähnlichen Geschwindigkeiten (z.B. Teilvolumen einer strömenden Flüssigkeit)
- wichtige Anwendungen des Satzes v. Liouville z.B. in klassischer statistischer Mechanik

→ zum Beweis des Satzes v. Liouville:

wähle eine (gleichmäßig verteilte) Menge von N Massenpunkten als "Tracer", um dem Teilbereich T zu folgen:



$$\varrho(t_0) \equiv \frac{\text{Zahl } N \text{ der MP}}{\text{Phasenraum-Vol.}} = \text{const}_{q,p}$$

↑ Teilchendichte

die Teilchendichte ϱ genügt der Kontinuitätsglg

$$\partial_t \varrho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 ,$$

wobei $\vec{j} = \varrho\vec{\omega}$ die Teilchenstromdichte ist

$$\left(\frac{\text{Teilchen}}{\text{Fläche}\cdot\text{Zeit}} = \frac{\text{Teilchen}}{\text{Volumen}} \cdot \frac{\text{Strecke}}{\text{Zeit}} \right.$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot(\varrho\vec{\omega}) = \underbrace{(\vec{\nabla}\varrho)}_{=0}\cdot\vec{\omega} + \varrho\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega})}_{=0 \ (\text{s. S. } 61)}$$

(laut Annahme: Teilchen gleichmäßig verteilt)

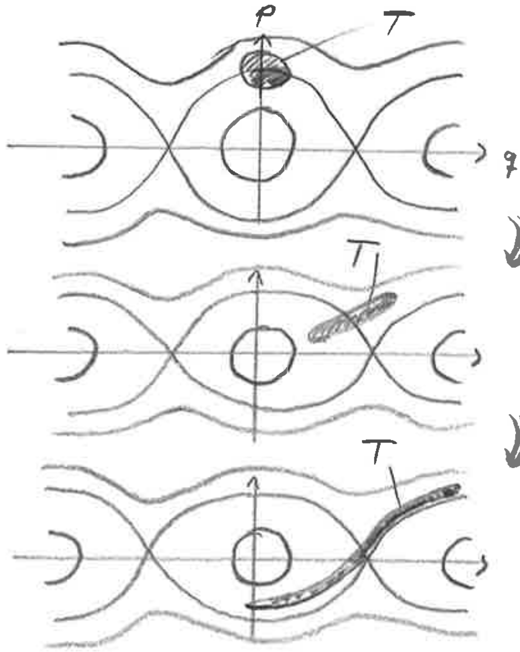
$\Rightarrow \partial_t \varrho = 0$, Teilchendichte bleibt konstant

wegen $N(t) = \int_{Vol(T(t))} \varrho(t)$, und da sowohl ϱ als auch N (laut Annahme) konstant sind, muss das Volumen des Bereichs T auch konstant bleiben. qed

⇝ Die Dynamik von Systemen ist deterministisch.
Phasenraumbetrachtungen machen deutlich, dass bei einigen Systemen kleine Änderungen der Anfangsbedingungen große Änderungen im Endergebnis hervorrufen können;

<u>Bsp:</u> Pendel, vgl. S. 60

⇒ Volumen von T bleibt konstant; aber Form wird verändert/verzerrt.



$t = t_0$

$t > t_0$

$t \gg t_0$

<u>Bem.:</u>

- manchmal ist die Verzerrung sehr groß; der für $t \to \infty$ besetzte Teilbereich (oft: Punkt, Linie) (<u>Grenzzyklus</u> / <u>Attraktor</u>) kann dann auch einen seltsamen Bereich des Phasenraums füllen, sogar einen Bereich von nichtganzzahliger Dimension ⇝ man spricht dann von <u>Chaos</u>

- quantitatives Maß für das Auseinanderstreben der Lsn:

  $$s(t) = s(t_0)\, e^{\lambda(t-t_0)}$$

  λ: <u>Lyapunov-Exponent</u>

  s: Entfernung zweier Punkte im Phasenraum

  ⇒ für $\lambda > 0$ ist die Bewegung chaotisch

- z.B. Himmelsmechanik / Stabilität des Sonnensystems

  ⇝ Dreikörperproblem, nicht analytisch lösbar, kann chaotische Bahnen haben

  ⇝ Sonnensystem: $\lambda \approx +3 \cdot 10^{-10} \frac{1}{\text{Jahr}}$