4. Hamilton-Formalismus

→ nach Newton- und Lagrange- der dritte Formalismus der klass. Mechanik; warum?

- wichtig beim Übergang zu Quantenmechanik (Theorie II)
  Statistische Physik (Theorie III)
- ist oft "elegant", hat "ästhetische" Vorteile

4.1 Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

Erinnerung an Lagrange-Formalismus:

verallg. Koord. q_a, verallg. Geschwindigkeiten $\dot{q}_a$, $a = 1, \ldots, s$

Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q}, t) \Rightarrow$ verallg. Impulse $p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}$

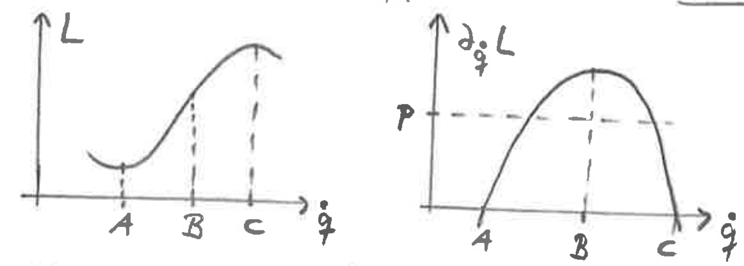
neue Idee: nehme q_a, p_a (statt $q_a, \dot{q}_a$) als Koordinaten

→ diese bilden einen $2s$-dim. Phasenraum

- wollen in $L(q, \dot{q}, t)$ die $\dot{q}_a$ durch p_a ersetzen

$\Rightarrow$ müssen die Def $p_a = \partial_{\dot{q}_a} L(q, \dot{q}, t)$ invertieren!

aber z.B.:



d.h. $p \leftrightarrow \dot{q}$ nicht eindeutig;

jedoch: $p \leftrightarrow \dot{q}$ eindeutig, falls $\dot{q} < B$ oder $\dot{q} > B$

$\Rightarrow$ Invertieren nur möglich in einem Bereich mit $\partial_{\dot{q}}^2 L \neq 0$

- auch nach Beschränkung auf z.B. $\dot{q} < B$ enthält $L(q, \dot{q}(p), t)$ weniger Information als $L(q, \dot{q}, t)$!

z.B. $L \equiv \frac{m}{2}\dot{q}^2$, $p = \partial_{\dot{q}} L = m\dot{q}$, $L = \frac{1}{2m}p^2$

vs. $\tilde{L} \equiv \frac{m}{2}(\dot{q} - f(q))^2$, $\tilde{p} = m(\dot{q} - f(q))$, $\tilde{L} = \frac{1}{2m}\tilde{p}^2$

verschiedene Physik (EL-Gln) dieselbe Funktion?! ↯

die Lösung des Problems: Legendre-Transformation

Behauptung: Die Hamilton-Funktion, def. durch

$$H(q,p,t) \equiv \sum_{a=1}^{s} \dot{q}_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - L = \sum_{a=1}^{s} \dot{q}_a p_a - L$$

enthält dieselbe Information wie $L(q,\dot{q},t)$,
d.h. aus gegebener $H(q,p,t)$ kann $L(q,\dot{q},t)$
rekonstruiert werden (solange $\det(\partial_{\dot{q}_a}\partial_{\dot{q}_b} L) \neq 0$ ist).

Bem: • in H muss $\dot{q}$ durch p ersetzt werden; H formal $\dot{q}$-unabh.:

$$\partial_{\dot{q}_b} H = \partial_{\dot{q}_b} \Big[\sum_{a=1}^{s} \dot{q}_a p_a - L\Big] = p_b - \partial_{\dot{q}_b} L = p_b - p_b = 0$$

• die Transformation von $L \to H$ heisst Legendre-Trafo bzgl. $\dot{q}$

• physikalisch entspricht H der Energie des Systems

Beweis: (durch explizite Konstruktion: inverse Leg-Trafo)

sei H gegeben; def

$$\dot{Q}_b \equiv \partial_{p_b} H = \partial_{p_b} \Big[\sum_{a=1}^{s} \dot{q}_a p_a - L(q,\dot{q},t)\Big] = \dot{q}_b + \sum_{a=1}^{s} \frac{\partial \dot{q}_a}{\partial p_b} p_a - \sum_{a=1}^{s} \underbrace{\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}}}_{p_a} \frac{\partial \dot{q}_a}{\partial p_b} = \dot{q}_b$$

$$\text{def } L^{neu} \equiv \sum_{b=1}^{s} p_b \partial_{p_b} H - H = \sum_{b=1}^{s} p_b \dot{q}_b - \Big[\sum_{a=1}^{s} \dot{q}_a p_a - L\Big] = L \quad \text{qed}$$

Bsp sei: $L \equiv \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$

$$\Rightarrow p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}, \quad H = p\dot{q} - L = m\dot{q}^2 - \frac{m}{2}\dot{q}^2 + V(q) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + V(q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

inverse Trafo: $\dot{q} = \partial_p H = p/m$, $L^{neu} = p\dot{q} - H = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} - V(q) = \frac{p^2}{2m} - V(q) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$ ✓ ok

Bsp (Thermodynamik:) innere Energie $U(S,V,N)$ — Teilchenzahl, Volumen, Entropie

Temperatur $T = \frac{\partial U}{\partial S}$

freie Energie $F(T,V,N) = U(S,V,N) - S\frac{\partial U}{\partial S} = U - TS$

((d.h. $-F \leftrightarrow U$ ist Legendre Trafo))

⇝ wissen nun, dass im Prinzip alle Information in der Hamilton-Funktion $H(q,p,t)$ enthalten ist.

⇝ wie beschreibt man nun die Dynamik des Systems (d.h. Zeitableitungen der Phasenraumkoord. q,p) ?

⇒ Euler-Lagrange-Glgn durch H ausdrücken!

- wissen schon (s. S. 54), dass $\frac{dq_a}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_a}$ gilt
- betrachte nun noch $\frac{\partial H}{\partial q_a}$:

$$H = \sum_{b=1}^{s} p_b \dot{q}_b(q,p,t) - L(q, \dot{q}(q,p,t), t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial q_a} = \sum_{b=1}^{s} p_b \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial q_a} - \frac{\partial L}{\partial q_a} - \sum_{b=1}^{s} \underbrace{\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b}}}_{= p_b} \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial q_a}$$

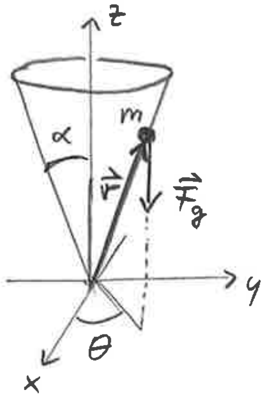
$$= -\frac{\partial L}{\partial q_a} \overset{(EL)}{=} -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = -\frac{d}{dt} p_a$$

⇒ Hamiltonsche Bewgln
$$\boxed{\frac{dq_a}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \quad \frac{dp_a}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_a}}$$

Bem.:
- Im Hamilton-Formalismus haben wir also 2 Dgl'n 1. Ordnung (statt 1 Dgl 2. Ordnung)
- es folgt
$$\frac{dH}{dt} = \sum_a \frac{\partial H}{\partial q_a} \underbrace{\boxed{\frac{dq_a}{dt}}}_{= \frac{\partial H}{\partial p_a}} + \sum_a \frac{\partial H}{\partial p_a} \underbrace{\boxed{\frac{dp_a}{dt}}}_{= -\frac{\partial H}{\partial q_a}} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

falls $H(q,p,\cancel{t})$ also nicht explizit von t abhängt, ist $\frac{dH}{dt} = 0$ ⇒ H = Energie bleibt erhalten.

Bsp (vgl. Ü16: Massenpunkt gleitet reibungsfrei im Schwerefeld auf einem Kreiskegel)



wähle verallg. Koord.: $r = |\vec{r}|$, θ

((Öffnungswinkel des Kegels α bleibt konstant))

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \sin\alpha \cos\theta \\ r \sin\alpha \sin\theta \\ r \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{r} \sin\alpha \cos\theta - \dot{\theta} r \sin\alpha \sin\theta \\ \dot{r} \sin\alpha \sin\theta + \dot{\theta} r \sin\alpha \cos\theta \\ \dot{r} \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2 \sin^2\alpha \right)$$

$$V = mgz = mgr\cos\alpha$$

$$L = T - V = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2 \sin^2\alpha \right) - mgr\cos\alpha \qquad (s=2)$$

verallg. Imp. $p_r = \partial_{\dot{r}} L = m\dot{r}$, $p_\theta = \partial_{\dot{\theta}} L = m\dot{\theta} r^2 \sin^2\alpha$

$\Rightarrow$ Hamilton-Funktion ist dann

$$\begin{aligned} H &= \dot{r} p_r + \dot{\theta} p_\theta - L \\ &= m\dot{r}^2 + m\dot{\theta}^2 r^2 \sin^2\alpha - \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2 \sin^2\alpha \right) + mgr\cos\alpha \\ &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}\dot{\theta}^2 r^2 \sin^2\alpha + mgr\cos\alpha \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ die Hamiltonschen Bewgln lauten also:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \qquad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3\sin^2\alpha} - mg\cos\alpha$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2\sin^2\alpha}, \qquad \frac{dp_\theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad ((\Rightarrow p_\theta \text{ erhalten}))$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{1}{m}\frac{dp_r}{dt} = \frac{p_\theta^2}{m^2\sin^2\alpha}\frac{1}{r^3} - g\cos\alpha = \frac{c_1}{r^3} + c_2$$

Konstanten

((Glg. hängt nicht von θ ab $\rightsquigarrow$ Lsg ist $r(t)$; danach kann $\theta(t)$ aus $\frac{d\theta}{dt} = \frac{p_\theta}{m\sin^2\alpha}\frac{1}{r^2(t)}$ bestimmt werden))