Bsp Trafo eines Vektors auf der z-Achse in Σ_0
ins körperfeste System Σ: $\vec{r} = R^T \vec{r}_0 = R^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin\beta \sin\gamma \\ r \sin\beta \cos\gamma \\ r\cos\beta \end{pmatrix}$

für sich bewegende Körper sind dann die Eulerwinkel
zeitabhängig: $\vec{x}_0(t) = R(t)\, \vec{x}$ zeitunabhängig

können nun aus Kenntnis von R die Winkelgeschw. $\vec{\omega}$
explizit berechnen;
((vgl. S. 45', brauchen $\dot{R}$))

$$\Rightarrow \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dot\varphi \sin\theta \sin\psi + \dot\theta \cos\psi \\ \dot\varphi \sin\theta \cos\psi - \dot\theta \sin\psi \\ \dot\varphi \cos\theta + \dot\psi \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ im Hauptachsensystem ist die kinetische Energie dann
(ohne Schwerpkts-Bewegung)

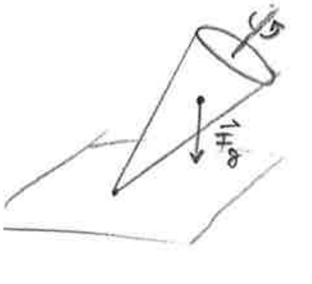
$$T_{\text{Rot.}} = \frac{1}{2}\omega^i I^{ik} \omega^k = \frac{1}{2}\left[I_1 (\omega^1)^2 + I_2 (\omega^2)^2 + I_3 (\omega^3)^2 \right] \quad (\text{s. S. 47})$$

(Eulerwinkel einsetzen)

$$= \frac{1}{2}\Big\{ \dot\varphi^2 \left[(I_1 \sin^2\psi + I_2 \cos^2\psi) \sin^2\theta + I_3 \cos^2\theta \right]$$
$$+ \dot\theta^2 \left[I_1 \cos^2\psi + I_2 \sin^2\psi \right]$$
$$+ \dot\psi^2 I_3$$
$$+ 2\dot\varphi\dot\theta\, [I_1 - I_2] \sin\theta \sin\psi \cos\psi$$
$$+ 2\dot\varphi\dot\psi\, I_3 \cos\theta \Big\}$$

$\Rightarrow$ haben nun explizit $L(\dot q^i, \varphi, \theta, \psi)$

$\rightsquigarrow$ Bwgln; Lsg i.A. aber sehr schwierig ...
z.B. Kreisel



Lsg aber möglich mit Vereinfachungen, z.B. §3.4

3.4 Der symmetrische Kreisel

betrachte nun den Fall $I_1 = I_2 \equiv I$

$\rightsquigarrow$ Lfm E :

$$T_{Rot.} = \frac{1}{2}\left[I\left((\omega^1)^2 + (\omega^2)^2\right) + I_3 (\omega^3)^2 \right]$$
$$= \frac{I}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2$$

Kräftefreier Kreisel: $L = T$

$\Rightarrow$ φ und ψ kommen nicht vor (zyklische Variablen!)

$\Rightarrow$ zwei der Bewgln. sind Erhaltungssätze

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = 0$$

im Inertialsystem Σ_0 ist (wegen $V=0$) der Drehimpuls $\vec{L}_0$ erhalten

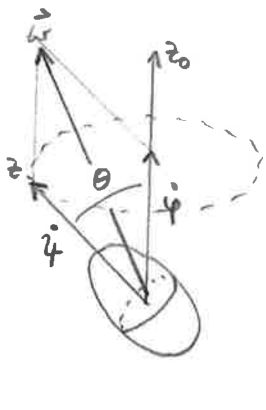
$\rightsquigarrow$ wähle Σ_0 z.B. so dass $\vec{L}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{pmatrix}$

im körperfesten System Σ ist dann (siehe Bsp S.50)

$$\vec{L} = R^T \vec{L}_0 = \begin{pmatrix} L\sin\theta\sin\psi \\ L\sin\theta\cos\psi \\ L\cos\theta \end{pmatrix}$$

in Σ ist I diagonal, also gilt auch

$$= \begin{pmatrix} I\omega^1 \\ I\omega^2 \\ I_3\omega^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I(\dot\varphi\sin\theta\sin\psi + \dot\theta\cos\psi) \\ I(\dot\varphi\sin\theta\cos\psi - \dot\theta\sin\psi) \\ I_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi) \end{pmatrix}$$



- $\cos\psi\cdot$(1. Zeile) $-$ $\sin\psi$ (2. Zeile) $\rightsquigarrow$ $\dot\theta = 0$

  $\Rightarrow$ Winkel zwischen z-Achsen in Σ_0, Σ ist zeit<u>un</u>abhängig

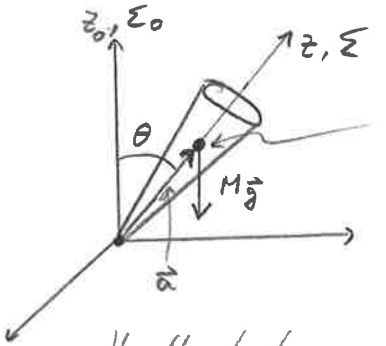
- (1. Zeile)$|_{\dot\theta=0}$ $\rightsquigarrow$ $\dot\varphi = \frac{L}{I}$ (= const.)

  $\Rightarrow$ "Knotenlinie" (N auf S.49) dreht sich mit konstanter Winkelgeschw. um z-Achse von Σ_0 : "Präzession"

- (3. Zeile) $\rightsquigarrow$ $\dot\psi = \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I}\right) L\cos\theta$ (= const.)

  $\Rightarrow$ Drehung mit konst. Winkelgeschw. um z-Achse von Σ : "Rotation um Figurenachse"

Kinderkreisel: symm. Kreisel im Erdschwerefeld, Kreisel-Spitze festgehalten



Schwerpkt

wähle Σ_0 mit z_0-Achse $\parallel \vec{g}$ (Schwerefeld)

wähle Ursprung Σ_0, Σ als Kreiselspitze

Hauptträgheitsmomente in Σ?

$\rightsquigarrow$ Steiner: $I_1 = I_2 = I^{cms} + Ma^2 \equiv \tilde{I}$

$I_3 = I_3^{cms}$

Schwerkraft $\to$ Potential $V = Mg z_0 = Mg\, a \cos\theta$

$$\Rightarrow L = \frac{\tilde{I}}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2 - Mg\,a\cos\theta$$

- φ, ψ wieder zyklisch $\Rightarrow$ Erhaltungssätze

$\dot p_\varphi = 0$ mit $p_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = \dot\varphi\left(\tilde{I}\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta\right) + \dot\psi I_3\cos\theta$

$\dot p_\psi = 0$ mit $p_\psi \equiv \frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = I_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)$

$$\Leftrightarrow \dot\varphi = \frac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{\tilde{I}\sin^2\theta}, \quad \dot\psi = \frac{p_\psi\cos^2\theta - p_\varphi\cos\theta}{\tilde{I}\sin^2\theta} + \frac{p_\psi}{I_3}$$

(($V=0$, S. 51: hatten $\theta = $ const $\Rightarrow$ konnten $\dot\varphi, \dot\psi$-Gln trivial integrieren; jetzt: $\theta(t) = ?$, dann $\varphi(t), \psi(t)$))

- betrachte Energieerhaltung (vgl. Zentralkraftprobleme, §1)

$$E = T + V = \frac{\tilde{I}}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2 + Mg\,a\cos\theta$$

jetzt $\dot\varphi(\theta), \dot\psi(\theta)$ einsetzen

$$= \frac{\tilde{I}}{2}\dot\theta^2 + \underbrace{\frac{p_\psi^2}{2I_3^2} + Mga}_{\equiv E - \tilde{E}} + V_{eff}(\theta)$$

TdV: $t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{\tilde{I}}\left[\tilde{E} - V_{eff}(\theta)\right]}}$ ...(elliptisches Integral)... $\rightsquigarrow \theta(t)$

$\Rightarrow$ Resultat:

$\Big\}$ aus $[\;] \overset{!}{\geq} 0$