• Eigenwerte / Eigenvektoren (EW / $\vec{EV}$)

I ist symmetrische Matrix

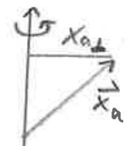
⇒ diagonalisierbar, per orthogonaler Transformation (vgl. §3.1)

⇒ kann Koord.-System so drehen, dass $I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$

⇝ diese EW I_1, I_2, I_3 heissen <u>Hauptträgheitsmomente</u>

Ü19 / Ü20 ⇒ die entsprechenden $\vec{EV}$ sind <u>Hauptträgheitsachsen</u>

• Trägheitsmoment bzgl. fester Achse:



sei $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \omega \vec{e}_3$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} I^{33} (\omega)^2 , \quad \text{wobei } I^{33} = \sum_a m_a \left[\delta^{33} \vec{x}_a^{\,2} - x_a^3 x_a^3 \right] = \sum_a m_a \left[(x_a^1)^2 + (x_a^2)^2 \right] = \sum_a m_a x_{a\perp}^2$$

⇒ kin. E im Hauptachsensystem

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} , \quad T = \frac{1}{2} \left(I_1 (\omega^1)^2 + I_2 (\omega^2)^2 + I_3 (\omega^3)^2 \right)$$

• Trägheitstensor in einem Σ', welches um $\vec{a}$ relativ zu Σ verschoben ist:

$$\vec{x}_a' = \vec{x}_a + \vec{a}$$

$$I'^{ij} = \sum_a m_a \left[\delta^{ij} (\vec{x}_a')^2 - x_a'^i x_a'^j \right]$$

$$= \sum_a m_a \left[\delta^{ij} (\vec{x}_a + \vec{a})^2 - (x_a^i + a^i)(x_a^j + a^j) \right]$$

$$= I^{ij} + 2 \delta^{ij} \vec{a} \cdot \underbrace{\sum_a m_a \vec{x}_a}_{=0} - a^i \underbrace{\sum_a m_a x_a^j}_{=0} - a^j \underbrace{\sum_a m_a x_a^i}_{=0}$$

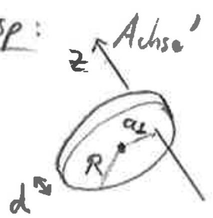
$$+ \underbrace{\sum_a m_a}_{=M} \left[\delta^{ij} \vec{a}^{\,2} - a^i a^j \right] \qquad \text{(SP im Ursprung)}$$

$$I'^{ij} = I^{ij} + M \left[\delta^{ij} \vec{a}^{\,2} - a^i a^j \right]$$

<u>Steinerscher Satz</u>

(s. auch Ü19c)

<u>Bsp:</u>



$$I'^{33} = I^{33} + M a_\perp^2$$

und $I^{33} = \rho \int_0^d dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr \, r \, r^2 = \rho d \, 2\pi \frac{R^4}{4}$

Zylinderkoord. um Achse'

Massendichte

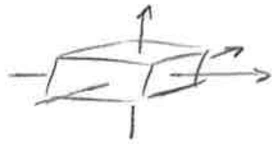
- betrachte nichtdiagonale Komponenten von I, z.B.

$$I^{12} = \int d^3\vec{x}\; \rho(x^1,x^2,x^3)\,[-x^1x^2]$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3\vec{x}\; \{-\rho(x^1,x^2,x^3)\,x^1x^2 - \rho(\overset{\to -x^1}{x^1},x^2,x^3)\,\overset{\to -x^1}{x^1}x^2\}$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3\vec{x}\; \underbrace{\{\rho(-x^1,x^2,x^3) - \rho(x^1,x^2,x^3)\}}_{=0 \text{ für symm. } \rho \text{, d.h. falls } \rho(-x^1,\ldots)=\rho(x^1,\ldots)}\, x^1x^2$$

$\Rightarrow$ die Hauptträgheitsachsen sind die Symmetrieachsen des st. Körpers



↖ (sieht man meist)

- im Hauptachsensystem: $I_1 = \sum_a m_a\,[(x_a^2)^2 + (x_a^3)^2]$ etc.

  $\Rightarrow$ $I_1, I_2, I_3 \geq 0$ (Trägheitstensor ist positiv definit)

- einige Spezialfälle:
  - ein Massenpunkt, $\vec{x}_1 = 0$ (da im SP) $\Rightarrow$ $I^{ij} = 0$
  - 1-dim Stab $\parallel \vec{e}_3$, $x_a^1 = 0 = x_a^2$ $\Rightarrow$ $I^{33} = 0$, $I^{11} = I^{22} > 0$
  - 2-dim Scheibe $\perp \vec{e}_3$, $x_a^3 = 0$ $\Rightarrow$ $I^{11} + I^{22} = I^{33} > 0$

- Klassifikation der starren Körper:
  - unsymmetrischer Kreisel

    $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$

    Hauptträgheitsachsen sind eindeutig festgelegt.
  - symmetrischer Kreisel

    $I_1 = I_2$, $I_3 \neq I_1$

    nur 3. Hauptträgheitsachse eindeutig festgelegt; in 1-2-Ebene beliebige Wahl möglich.
  - Kugelkreisel

    $I_1 = I_2 = I_3$

    in jedem Koord-System sind die 3 Achsen Hauptträgheitsachsen.

→ wähle nun als verallg. Koord.: y^i, φ^i $\Rightarrow$ $v^i = \dot{y}^i$, $\omega^i = \dot{\varphi}^i$

dann ist $L = \frac{M}{2}\sum_{i=1}^{3}(\dot{y}^i)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\dot{\varphi}^i I^{ij}\dot{\varphi}^j - V(\vec{y},\vec{\varphi})$

der zu $\vec{y}$ kanonisch konjugierte Impuls: <u>Gesamtimpuls</u>

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}^i} = M\dot{y}^i = M v^i \qquad (\vec{p} = M\vec{v})$$

der zu $\vec{\varphi}$ kanonisch konjugierte Impuls: <u>Eigendrehimpuls</u>

$$M^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}^i} = \sum_{j=1}^{3} I^{ij}\dot{\varphi}^j = \sum_{j=1}^{3} I^{ij}\omega^j \qquad (\vec{M} = I\vec{\omega})$$

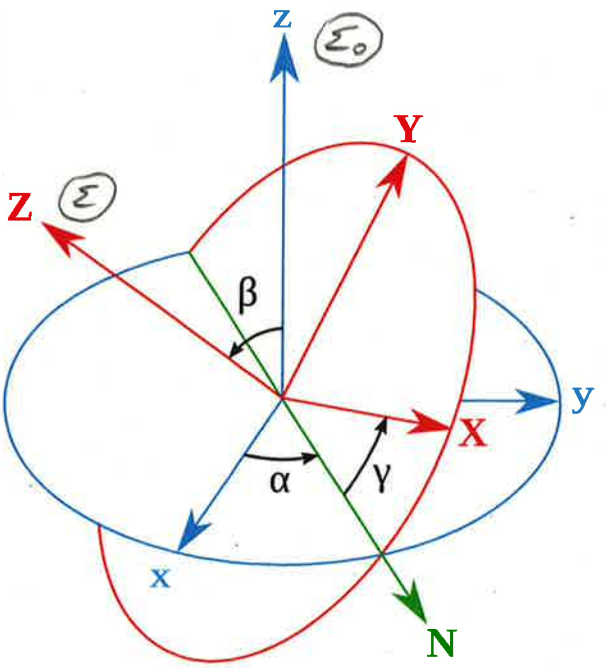
$\Rightarrow$ Bewgln (EL-Glgn):

$$\frac{d}{dt}p^i = \frac{\partial L}{\partial y^i} = -\frac{\partial V}{\partial y^i}, \qquad \frac{d}{dt}M^i = \frac{\partial L}{\partial \varphi^i} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi^i}$$

"Gesamtkraft" "Drehmoment"

→ Wahl der drei Winkel: <u>Eulerwinkel</u>

(bestimme nun explizit die Drehung der Koord.-Systeme, vgl. S. 45)



Σ_0: raumfestes Inertialsystem

Σ: körperfestes Koord.-System

$\Leftrightarrow$ 3 Winkel (α,β,γ) $\Leftrightarrow$ $(\varphi,\theta,\psi)_{Lit}$

$$\vec{x} = R^T\vec{x}_0, \qquad R^T \equiv CBA$$

mit $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

s_γ etc.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R^T = \begin{pmatrix} c_\gamma c_\alpha - s_\gamma c_\beta s_\alpha & c_\gamma s_\alpha + s_\gamma c_\beta c_\alpha & s_\gamma s_\beta \\ -s_\gamma c_\alpha - c_\gamma c_\beta s_\alpha & -s_\gamma s_\alpha + c_\gamma c_\beta c_\alpha & c_\gamma s_\beta \\ s_\beta s_\alpha & -s_\beta s_\alpha & c_\beta \end{pmatrix}$$