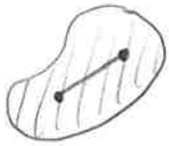
3.3 Der starre Körper

(sehr wichtiges Bsp der klassischen Mechanik)

Für makroskopische Festkörper ($\sim 10^{23}$ Teilchen/cm^3) wird eine Betrachtung als Mehrteilchensystem (vgl. §1.4) fragwürdig.

$\rightsquigarrow$ Körper erscheinen (oft) als Kontinuum;
wir beobachten z.B. Verschiebungen / Drehungen / Deformationen;
dies hat nur bedingt mit mikroskopischen T.-Bahnen $\vec{r}_i(t)$ zu tun!

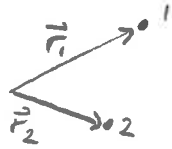
$\rightsquigarrow$ Idealisierung: Starrer Körper $\Leftrightarrow$ Massenpunkte mit vorgegebenen Abständen



((d.h. nicht deformierbar; nicht brauchbar z.B. für Elastizitätstheorie / Hydrodynamik / ...))

$\rightsquigarrow$ Anzahl der Freiheitsgrade?

2 Massenpunkte: 1 Zwangsbedingung, $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = l_{12}$



$s = 3N - 1 = 6 - 1 = 5$ Freiheitsgrade

z.B. 3 Schwerpkts-Koord. + 2 Winkel (Richtung von $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$)

3 Massenpunkte: 3 Zwangsbedingungen
$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = l_{12}$
$|\vec{r}_2 - \vec{r}_3| = l_{23}$
$|\vec{r}_3 - \vec{r}_1| = l_{31}$

$s = 3N - 3 = 9 - 3 = 6$ Freiheitsgrade

z.B. 3 Schwerpunkts-Koord. + 3 ("Euler"-) Winkel

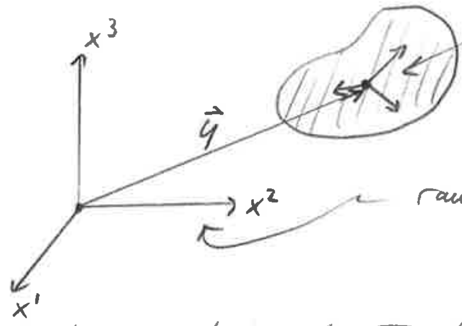
$N \geq 4$ Massenpunkte: 3 neue Abstände (z.B. l_{i1}, l_{i2}, l_{i3}) fixieren die Lage von Punkt i ($3 < i \leq N$)

$\Rightarrow \Delta s = 0$ wenn $N \to N+1$

$\Rightarrow$ der starre Körper hat $\underline{s = 6}$ Freiheitsgrade

(z.B. 3 Schwerpunkts-Koord. + 3 Winkel)

Kinematik des starren Körpers



körperfestes Koord.-System Σ
(i. A. nicht inertial)

raumfestes Inertialsystem Σ_0

Körper hat 6 Freiheitsgrade; 3 beschreiben Schwerpunkts-Bewegung
3 beschreiben Drehungen

⇝ Lagrange-Funktion $L = ?$ Bewgl. ? Erhaltungsgrößen ?

betrachte starren Körper aus kleinen Massenstücken (m_a)
mit Ortsvektoren $\vec{x}_{0a}$ zusammengesetzt

⇒ Gesamtmasse: $M \equiv \sum_a m_a$

⇝ im Kontinuumslimes schreiben wir $\sum \to \int$,

$$\sum_a m_a f(\vec{x}_{0a}) \to \int d^3\vec{x}_0 \underbrace{\rho(\vec{x}_0)}_{\text{Massendichte}} f(\vec{x}_0)$$

z.B. $\rho(\vec{x}_0) = \sum_a m_a \delta^{(3)}(\vec{x}_0 - \vec{x}_{0a})$

schreibe $\vec{x}_0 = \vec{y} + R\vec{x}$

- $\vec{x}$: Koord. bzgl. Σ
- R: Rotation (Drehmatrix)
- $\vec{y}$: Translation des Ursprungs
- $\vec{x}_0$: Koord. bzgl. Σ_0

(s. auch Einschub S. 45')

$$\Rightarrow \dot{\vec{x}}_0 = \dot{\vec{y}} + R(\vec{\omega} \times \vec{x}) \qquad (\dot{R}\vec{x} + R\dot{\vec{x}}, \ \dot{\vec{x}} = 0 \leftarrow \text{starrer Körper!})$$

$\vec{\omega}$: Winkelgeschwindigkeit (vgl. §1.3, S.9)

⇝ kin. Energie

$$T = \sum_a \frac{m_a}{2} \dot{\vec{x}}_{0a}^{\,2}$$

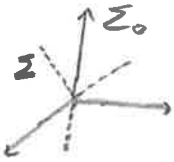
$$= \sum_a \frac{m_a}{2} \left(\dot{\vec{y}} + R(\vec{\omega} \times \vec{x}_a)\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\boxed{\sum_a m_a}}_{= M} \dot{\vec{y}}^{\,2} + \underbrace{\dot{\vec{y}} R\left[\vec{\omega} \times \sum_a m_a \vec{x}_a\right]}_{(2)} + \underbrace{\sum_a \frac{m_a}{2} \left[R(\vec{\omega} \times \vec{x}_a)\right]^2}_{(3)}$$

(Gesamtmasse, s.o.)

Einschub: Drehungen

$\vec{q} = \vec{0}$,



$$\vec{x}_0 = R(t)\,\vec{x}$$

↑ Drehmatrix. $R^T R = \mathbb{1}$

$\Leftrightarrow R^T = R^{-1}$

$$\Leftrightarrow \vec{x} = R^T(t)\,\vec{x}_0$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{x}}_0 = \dot{R}\,\vec{x} + R\,\dot{\vec{x}}, \quad \dot{\vec{x}} = 0$$

, da wir starren Körper betrachten: im System Σ alles fixiert.

$\dot{R}$?

$$\dot{R}(t) = \lim_{\tau\to 0} \frac{R(t+\tau) - R(t)}{\tau} = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\Big[\underbrace{R(t+\tau)R^{-1}(t)}_{\stackrel{!}{=}\, D(t)} - \mathbb{1}\Big] R(t)$$

D ? 2 Drehungen hintereinander

$\Rightarrow D$ ist auch Drehung, $D^T D = \mathbb{1}$

bei $\tau = 0$ ist $D = R(t)R^{-1}(t) = \mathbb{1}$

Taylor: $D(t) = \mathbb{1} + \tau\,\Omega(t) + O(\tau^2)$

$$= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\big[\tau\,\Omega(t) + O(\tau^2)\big] R(t) = \underline{\underline{\Omega(t)R(t)}}$$

$$= \Omega(t)R(t)\,\vec{x}$$

Ω ?

$D^T = \mathbb{1} + \tau\,\Omega^T + O(\tau^2)$

$\mathbb{1} \stackrel{!}{=} D^T D = \mathbb{1} + \tau(\Omega^T + \Omega) + O(\tau^2)$

$\Rightarrow \Omega = -\Omega^T$ ist antisymmetrisch $\forall t$!

$\rightsquigarrow$ parametrisiere $\Omega(t)$ durch 3 Funktionen ω_0^i, $i = 1,2,3$

z.B. $\Omega(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0^3 & \omega_0^2 \\ \omega_0^3 & 0 & -\omega_0^1 \\ -\omega_0^2 & \omega_0^1 & 0 \end{pmatrix}$, def $\vec{\omega}_0(t) = \begin{pmatrix} \omega_0^1 \\ \omega_0^2 \\ \omega_0^3 \end{pmatrix}$

$$= \Omega(t)\,\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0^3 & \omega_0^2 \\ \omega_0^3 & 0 & -\omega_0^1 \\ -\omega_0^2 & \omega_0^1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ x_0^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0^2 x_0^3 - \omega_0^3 x_0^2 \\ \omega_0^3 x_0^1 - \omega_0^1 x_0^3 \\ \omega_0^1 x_0^2 - \omega_0^2 x_0^1 \end{pmatrix} = \vec{\omega}_0 \times \vec{x}_0$$

$$= R\,\vec{\omega} \times \vec{x}$$

③: es gilt $(R\vec{a})^2 = R^{ij}a^j R^{ik}a^k = \underbrace{(R^T)^{ji}R^{ik}}_{\overset{!}{=}\,\delta^{jk}\text{, da } R \text{ orthogonal: } R^TR=\mathbb{1}} a^j a^k = \vec{a}^2$

②: dieser Term verschwindet, falls
- $\dot{\vec{y}} = 0$, d.h. Koord.-Ursprung von Σ ruht
- $\sum_a m_a \vec{x}_a = 0$, d.h. Koord.-Ursprung von Σ liegt im Schwerpkt.

$\Rightarrow$ betrachte im Folgenden nur diese Fälle;
((können Σ-Ursprung immer in Schwerpkt $\vec{X} \equiv \frac{\sum_a m_a \vec{x}_a}{\sum_a m_a}$ legen))

$$T \overset{!}{=} \frac{M}{2}\vec{v}^2 + \frac{1}{2}\sum_a m_a \underbrace{(\vec{\omega}\times\vec{x}_a)^2}, \quad \text{mit } \vec{v} \equiv \dot{\vec{y}}$$

$$= (\vec{\omega}\times\vec{x}_a)^i(\vec{\omega}\times\vec{x}_a)^i = \varepsilon^{ijk}\omega^j x_a^k\,\varepsilon^{ilm}\omega^l x_a^m$$

$\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ilm} = \delta^{jl}\delta^{km} - \delta^{jm}\delta^{kl}$ (vgl. Ü4)

$$= \omega^j[\vec{x}_a^2\delta^{jl} - x_a^j x_a^l]\omega^l$$

$$= \frac{M}{2}\vec{v}^2 + \frac{1}{2}\omega^i I^{ij}\omega^j, \quad \text{mit } I^{ij} \equiv \sum_a m_a[\delta^{ij}\vec{x}_a^2 - x_a^i x_a^j]$$

$$\overset{\text{(Kont.-Limes)}}{=} \int d^3\vec{x}\,\rho(\vec{x})\,[\delta^{ij}\vec{x}^2 - x^i x^j]$$

I^{ij} heisst Trägheitstensor

Bem.:
- I^{ij} ist bezüglich eines körperfesten Koord-Systems definiert; hängt daher von Wahl des Ursprungs ab
  $\rightsquigarrow$ s. auch unten
- I^{ij} sind Komponenten eines Tensors 2. Stufe; bezeichne Matrix mit Komponenten I^{ij} als I; dann ist $\omega^i I^{ij}\omega^j = \omega^T I \omega$
- I ist symmetrisch, da $I^{ij} = I^{ji}$

$\rightsquigarrow$ Eigenschaften des Trägheitstensors

- Transformationsverhalten bei Drehungen:
  $I'^{ij} = R^{ik}R^{jl}I^{kl} = R^{ik}I^{kl}(R^T)^{lj}$
  bzw. $I' = RIR^T$