Bsp.: (zwei gekoppelte Oszillatoren)

betrachte zwei identische 1-dim Systeme (Eigenkreisfrequenz ω_0), durch Ww. gekoppelt:

$$L = \frac{1}{2}(\dot x_1^2 + \dot x_2^2) - V \,, \quad V = \frac{1}{2}\omega_0^2 (x_1^2 + x_2^2) + \alpha x_1 x_2 = \frac{1}{2} x^T \begin{pmatrix} \omega_0^2 & \alpha \\ \alpha & \omega_0^2 \end{pmatrix} x \,, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Hauptachsentrafo

$H = H^T$ ✓

$\det(H - \lambda \mathbb{1}) \overset{!}{=} 0$

(($Sp\, H = \lambda_1 + \lambda_2$ ✓))

$(H - \lambda_i \mathbb{1})\vec{EV}_i \overset{!}{=} 0$

(($\vec{EV}_i \cdot \vec{EV}_j = \delta_{ij}$ ✓))

$H = R^T H_{diag} R$

$R = \begin{pmatrix} - \vec{EV}_1 - \\ - \vec{EV}_2 - \end{pmatrix}$

kinetische E ist bereits diagonal ⇝ bei Schritt (3) beginnen:

Eigenwerte? $\det\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \tilde k_i & \alpha \\ \alpha & \omega_0^2 - \tilde k_i \end{pmatrix} = (\omega_0^2 - \tilde k_i)^2 - \alpha^2 \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \omega_0^2 - \tilde k_i = \pm \alpha$

$\Rightarrow \tilde k_{1/2} = \omega_0^2 \mp \alpha$ Eigenkreisfreq. des gekoppelten Systems

($\tilde k_{1/2} > 0$ für $\alpha < \omega_0^2$)

Eigenvektoren? $\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \tilde k_i & \alpha \\ \alpha & \omega_0^2 - \tilde k_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\alpha & \alpha \\ \alpha & \pm\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{EV}_1 = \frac{1}{\sqrt 2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,, \quad \vec{EV}_2 = \frac{1}{\sqrt 2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Diagonalisierung: $\tilde R = \frac{1}{\sqrt 2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

((denn: $\frac{1}{\sqrt 2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \alpha & 0 \\ 0 & \omega_0^2 + \alpha \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt 2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \alpha & -\omega_0^2 + \alpha \\ \omega_0^2 + \alpha & \omega_0^2 + \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0^2 & \alpha \\ \alpha & \omega_0^2 \end{pmatrix}$ ✓))

def Normalkoordinaten: $Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \equiv \tilde R x = \frac{1}{\sqrt 2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \tilde R^T Q = \frac{1}{\sqrt 2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$

⇝ Lsg: $x_1(t) = \frac{1}{\sqrt 2}\{Q_1(t) + Q_2(t)\} = \frac{1}{\sqrt 2}\{A\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha}\, t + B) + C\cos(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha}\, t + D)\}$

((modulierte Oszillationen: 

wegen $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$))

3.2 gedämpfte, erzwungene Schwingungen

→ mehr zum 1-dim harmonischen Oszillator

häufig werden Schwingungen erzwungen (äußere treibende Kraft); die meisten Oszillatoren sind gedämpft (Reibung)

Bewgl $\boxed{m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F(t)}$; $x(t) = ?$

$F(t)$: antreibende Kraft; nicht konservativ

$k > 0$; von Feder; oder Pendel, $\sin x \approx x$ etc.

$\gamma \geq 0$, Dämpfungskonstante

(a) homogene Lsg: $\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \left(\omega_0 \equiv \sqrt{k/m},\ \tau \equiv \frac{m}{\gamma}\right)$

Ansatz $x_{hom} = A e^{i\lambda t} \Rightarrow \left(-\lambda^2 + \frac{i\lambda}{\tau} + \omega_0^2\right) A e^{i\lambda t} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_{1/2} = \frac{i}{2\tau} \pm \omega, \quad \omega \equiv \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{(2\tau\omega_0)^2}}$

$\Rightarrow x_{hom}(t) \overset{\text{reell}}{=} e^{-\frac{t}{2\tau}}\left(A e^{i\omega t} + A^* e^{-i\omega t}\right)$ gedämpfte Schwingung

((typischerweise ist $\tau\omega_0 \gg 1$; dann $\omega \approx \omega_0$))

$\tau\omega_0$: Erdbeben 10^3, Klaviersaite 10^3, Atom 10^7

(b) inhomogene Lsg: betrachte periodisch antreibende Kraft

$F(t) \equiv m f e^{i\Omega t}$ $(f \in \mathbb{R})$: $\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = f e^{i\Omega t}$

Ansatz für spez. Lsg: $x_{inh} = A e^{i\Omega t} \Rightarrow \left(-\Omega^2 + \frac{i\Omega}{\tau} + \omega_0^2\right) A = f$

$$\Leftrightarrow A = \frac{f}{\omega_0^2 - \Omega^2 + \frac{i\Omega}{\tau}} = f\,\frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - \frac{i\Omega}{\tau}}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2}{\tau^2}} = \frac{f e^{i\varphi}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2}{\tau^2}}}$$

mit Phase φ, $\tan\varphi = -\frac{\Omega}{\tau}\,\frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2}$

$\Rightarrow$ allg. Lsg $x(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}}\left(A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}\right) + C e^{i(\Omega t + \varphi)}$

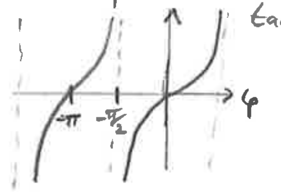
$$\text{mit } C \equiv \frac{f/\omega_0^2}{\sqrt{\left(1 - \Omega^2/\omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{\Omega}{\tau\omega_0^2}\right)^2}}$$

(A, B per Anfangsbed.)

⇝ für $t \gg \tau$ geht $x(t) \rightarrow C e^{i(\Omega t + \varphi)}$

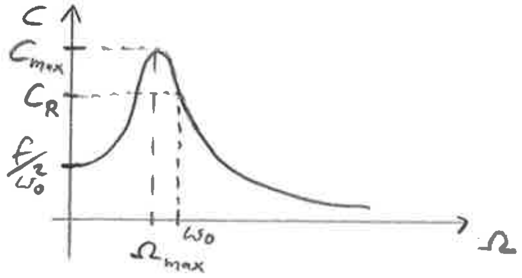
(τ nennt man daher "Relaxationszeit")

⇝ Phase φ ist immer negativ : Ursache → Wirkung ; Kausalität



$$0 \le \Omega < \omega_0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \varphi \le 0$$
$$\Omega = \omega_0 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$$
$$\omega_0 < \Omega \Rightarrow -\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$$

⇝ betrachte Amplitude C der (eingeschwungenen) Schwingung



<u>Maximum</u> bei

$$\Omega_{max} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2(\tau\omega_0)^2}} \overset{\tau\omega_0 \gg 1}{\approx} \omega_0$$

$$C_{max} = \frac{f\tau/\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{(2\tau\omega_0)^2}}} \approx \frac{f\tau}{\omega_0} \gg \frac{f}{\omega_0^2}$$

für $\frac{\Omega}{\omega_0} \gg 1$ geht $C \to 0$

bei $\Omega = \omega_0$ ist $C_R = \frac{f\tau}{\omega_0}$ ("Resonanz")

⇝ für eine reelle antreibende Kraft

$$F(t) = m f \sin(\Omega t) \Rightarrow x_{inh}(t) = C \sin(\Omega t + \varphi)$$

⇝ Resonanzfall $(\Omega \to \omega_0)$ <u>ohne</u> Dämpfung ? $(\tau\omega_0 \to \infty)$

(in Lsg oben wird dann $C = \infty$!)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f \sin(\Omega t)$$

Lsg (s.o.) für $\Omega \neq \omega_0$: $x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) + \frac{f}{\omega_0^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t)$

$$= \tilde{A} \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) + \frac{f}{\omega_0^2 - \Omega^2} \left[\sin(\Omega t) - \sin(\omega_0 t) \right]$$

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon \quad , \quad \varepsilon \ll \omega_0$$

$$\approx \tilde{A} \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) - \frac{f}{2\varepsilon\omega_0} \left[\varepsilon t \cos(\omega_0 t) + O(\varepsilon^2) \right]$$

$$= \tilde{A} \sin(\omega_0 t) + \left(B - \frac{f}{2\omega_0} t \right) \cos(\omega_0 t)$$

Amplitude divergiert für $t \to \infty$

Bem.:

- gedämpfte lineare Schwingungen mit $s>1$:

  $\mathcal{F} = \frac{1}{2}\, \dot{q}_i\, \mathcal{F}_{ij}\, \dot{q}_j \quad , \quad j = 1, \ldots, s \qquad$ (Einstein!)

  Normalkoord. / Bewgl'n diagonalisieren (d.h. $T, V, \mathcal{F}$ gleichzeitig) geht nur in Sonderfällen ...

- man kann auch kleine Schwingungen um eine zeitabhängige Referenzlsg $q_0(t)$ betrachten; ein mathematisch "interessanter" Fall

  ⇝ Bewgl. für δq hat dann "zeitabhängige Federkonstanten":

  $$m\, \delta\ddot{q}_a = - \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_a \partial q_b}\right|_{q_0(t)} \delta q_b$$

- in allen Systemen (spätestens bei großen Amplituden) treten Nichtlinearitäten auf;

  ⇝ mathematisch erheblich schwieriger!

  (Bsp: anharmonischer Oszillator $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x^n$, $n \in \{2, 3, \ldots\}$)

  ⇝ Bewgln werden dann meist numerisch gelöst, oder näherungsweise analytisch.

- Kernproblem bei nichtlinearen Dgln:

  Superpositionsprinzip nicht mehr gültig!

  ⇝ Schwingungen überlagern sich nicht ungestört

  (→ z.B. Eigenfrequenz ~ Amplitude etc.)

  ⇝ (allg Lsg der inhom Dgl) ≠ (allg Lsg der hom Dgl) + (spez Lsg der inhom Dgl)

  ⇝ auch neuartige Phänomene (z.B. Kippen; Resonanzkurven LR)

(versagt bei chaotischem Verhalten; s. später, Hamilton §4)

- das wichtigste Näherungsverfahren: Störungsrechnung

  falls z.B. nichtlineare Kräfte $\sim \varepsilon$ mit $\varepsilon \ll 1$

  dann Ansatz als Potenzreihe $x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \ldots$,

  $\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \ldots$; ε-Potenzvergleich in Bewgln liefert Bewgln für $x_0, x_1, \ldots$