3. Wichtige Anwendungen

→ zu den wichtigsten Anwendungen der Mechanik gehören

- Zentralkraftbewegungen:
  Planeten, Satelliten ; einige (der wenigen) exakt lösbaren Probleme
  klassische Streutheorie
- Bewegung starrer Körper
  Kreisel, Trägheitsmomente, Drehbewegungen
  wichtig im Maschinenbau: rotierende Maschinen(teile), Unwuchten, ..
- Schwingungen
  (a) kleine/lineare : harmonischer Oszillator ("wichtigstes" Modell der Physik)
  Elektrotechnik ; Kontinuum → Wellengleichungen
  (b) große/nichtlineare : Näherungsmethoden, Störungsrechnung
  Architektur – Resonanzkatastrophen

3.1 Kleine Schwingungen

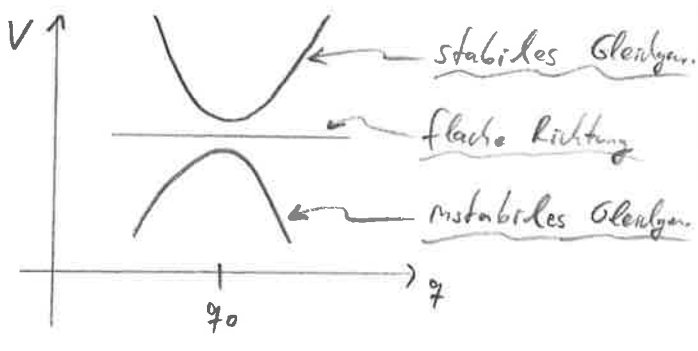
→ sind oft interessiert am Verhalten von Systemen "in der Nähe" ihrer Ruhelage

Sei z.B. q_0 eine Lsg der EL Gln : $\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} \right)_{q=q_0} = 0$

⇝ gibt es Lsn "in der Nähe" von q_0 ?

Sei q_0 insbesondere die Lsg in der Ruhelage: $\dot q_0 = 0$

⇝ was passiert bei kleinen Auslenkungen aus der Ruhelage?



- betrachte <u>einen Freiheitsgrad</u>: $s=1$

sei $L = \frac{1}{2} f(q)\dot q^2 - V(q)$

das Potential V habe Extremum bei q_0, d.h. $V'(q_0)=0$

diese Lsg sei der Ruhezustand, d.h. $\dot q_0 = 0$

$\rightsquigarrow$ schreibe nun $q = q_0 + \delta q \quad \rightarrow \quad \dot q = \delta\dot q$

entwickle bis 2. Ordnung in kleiner Auslenkung δq

$$L = \frac{1}{2} f(q_0)\,\delta\dot q^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\,\delta q\, f'(q_0)\,\delta\dot q^2}_{\text{ist schon 3. Ordnung!}} + \dots$$

$$- V(q_0) - \delta q \underbrace{V'(q_0)}_{=0} - \frac{1}{2}\delta q^2 V''(q_0) + \mathcal{O}(\delta q^3)$$

$$\approx \frac{1}{2} f(q_0)\,\delta\dot q^2 - V(q_0) - \frac{1}{2} V''(q_0)\,\delta q^2$$

$\rightsquigarrow$ Euler-Lagrange Gln für $\delta q, \delta\dot q$

$$0 = \left(\partial_t \partial_{\delta\dot q} - \partial_{\delta q}\right) L = f(q_0)\,\delta\ddot q + V''(q_0)\,\delta q$$

$$\Leftrightarrow \quad \delta\ddot q = -\frac{V''(q_0)}{f(q_0)}\,\delta q \qquad \text{\underline{harmonischer Oszillator} (H.O.)}$$

(a) $\frac{V''(q_0)}{f(q_0)} > 0$: def $\frac{V''(q_0)}{f(q_0)} \equiv \omega^2$, $\underline{\delta\ddot q = -\omega^2 \delta q}$,

allg Lsg $\underline{\delta q = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)}$

ist beschränkt bzw. <u>stabil</u>

(b) $\frac{V''(q_0)}{f(q_0)} < 0$: def $\frac{V''(q_0)}{f(q_0)} \equiv -\kappa^2$, $\underline{\delta\ddot q = \kappa^2 \delta q}$,

allg Lsg $\underline{\delta q = A e^{\kappa t} + B e^{-\kappa t}}$

ist unbeschränkt bzw. <u>instabil</u>

- betrachte mehrere Freiheitsgrade: $s > 1$

sei $L \equiv \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^{s} f_{ab}(q)\, \dot{q}_a \dot{q}_b - V(q)$

Ruhelage sei bei $q_0 = (q_{10}, \dots, q_{s0})$, d.h. $\partial_{q_a} V(q_0) = 0 \quad \forall a = 1..s$

$\rightarrow \delta q_a = q_a - q_{a0}$, Entwicklung zur 2. Ordnung in δq_a

$$L = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \underbrace{\boxed{f_{ab}(q_0)}}_{\equiv m_{ab} = m_{ba}} \delta\dot{q}_a \delta\dot{q}_b - V(q_0) - \frac{1}{2} \sum_{a,b} \underbrace{\boxed{\frac{\partial^2 V(q_0)}{\partial q_a \partial q_b}}}_{\equiv k_{ab} = k_{ba}} \delta q_a \delta q_b + O(\delta q^3)$$

(symmetrisch)

(wegen $\sum_{a,b} = \frac{1}{2}\sum_{a,b} + \frac{1}{2}\sum_{b,a}$)

schreibe Summen als Matrixmultiplikation: $\delta q = \begin{pmatrix} \delta q_1 \\ \vdots \\ \delta q_s \end{pmatrix}$

$m = (m_{ab})$, $k = (k_{ab})$, $\delta q^T = (\delta q_1, \dots, \delta q_s)$

$$= \frac{1}{2} \delta\dot{q}^T m\, \delta\dot{q} - \frac{1}{2} \delta q^T k\, \delta q - \underbrace{V(q_0)}_{\text{irrelevant für EL-Gln! (Konstante)}} + O(\delta q^3)$$

$\rightarrow$ lin. Algebra: symmetrische Matrizen (wie m, k) können mit orthogonalen Transformationen diagonalisiert werden; aber geht das auch gleichzeitig?

(1) $m_D \equiv \begin{pmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_s \end{pmatrix} = R\, m\, R^T$, $R^T = R^{-1}$

$\Leftrightarrow m = R^T m_D R$ (da $R^T R = \mathbb{1}$)

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \delta\dot{q}^T R^T m_D R\, \delta\dot{q} - \frac{1}{2} \delta q^T k\, \delta q$$

def. $R\,\delta q \equiv \delta q' \Leftrightarrow \delta q = R^T \delta q'$

$$= \frac{1}{2} \delta\dot{q}'^T m_D\, \delta\dot{q}' - \frac{1}{2} \delta q'^T R k R^T \delta q'$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{s} m_a (\delta\dot{q}_a')^2 - \frac{1}{2} \delta q'^T R k R^T \delta q'$$

(2) neue Variablen: def $Q_a' \equiv \sqrt{m_a}\, \delta q_a'$

$$\Rightarrow \quad Q' = m_D^{1/2}\, \delta q' \quad , \text{ wobei } \quad m_D^{1/2} \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{m_s} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \delta q' = m_D^{-1/2}\, Q'$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{1}{2} \dot{Q}'^T \dot{Q}' - \frac{1}{2} Q'^T \underbrace{\boxed{(m_D^{-1/2})^T R k R^T m_D^{-1/2}}}_{\equiv K} Q'$$

(3) die Matrix K ist auch symmetrisch, denn

$$K^T = (m_D^{-1/2})^T R k^T R^T m^{-1/2} \equiv K \quad (\text{da } k \text{ symmetrisch, d.h. } k^T = k)$$

K kann also diagonalisiert werden

$$K = \tilde{R}^T \tilde{k}_D \tilde{R} \quad \text{mit} \quad \tilde{k}_D \equiv \begin{pmatrix} \tilde{k}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{k}_s \end{pmatrix}$$

$$\text{def} \quad \tilde{R} Q' \equiv Q \quad \Leftrightarrow \quad Q' = \tilde{R}^T Q$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{1}{2} \dot{Q}'^T \underbrace{\mathbb{1}}_{=\tilde{R}^T \tilde{R}} \dot{Q}' - \frac{1}{2} Q'^T \underbrace{K}_{=\tilde{R}^T \tilde{k}_D \tilde{R}} Q'$$

$$= \frac{1}{2} \dot{Q}^T \dot{Q} - \frac{1}{2} Q^T \tilde{k}_D Q$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{s} \left(\dot{Q}_a^2 - \tilde{k}_a Q_a^2 \right)$$

→ kleine Schwingungen werden von s unabhängigen H.O.'s beschrieben! (vgl. S.37)

(a) $\tilde{k}_a > 0$: Schwingung mit Eigenkreisfrequenz $\omega_a = \sqrt{\tilde{k}_a}$

(b) $\tilde{k}_a < 0$: Instabilität der Ruhelage!
(negative Krümmung des Potentials in dieser Richtung)

(c) $\tilde{k}_a = 0$: die Koordinate Q_a ist zyklisch
(die entsprechende Richtung ist "flach")
⇒ einfache Translationsbewegung in dieser Koordinate : $Q_a = Q_a^0 + \dot{Q}_a^0\, t$