$$0 = \delta L \begin{aligned}[t] &= L(\vec r + \delta\vec r, \dot{\vec r} + \delta\dot{\vec r}, t) - L(\vec r, \dot{\vec r}, t) \\ &= \sum_{n,i}\Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial x_n^i}}_{\overset{(EL)}{=}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot x_n^i} = \dot p_n^i}\delta x_n^i + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot x_n^i}}_{= p_n^i}\delta\dot x_n^i\Big) \\ &= \sum_n\Big(\dot{\vec p}_n\cdot\delta\vec x_n + \vec p_n\cdot\delta\dot{\vec x}_n\Big) = \frac{d}{dt}\sum_n \vec p_n\cdot\delta\vec x_n \\ &= \frac{d}{dt}\sum_n \vec p_n\cdot(\delta\vec\varphi\times\vec r_n) \overset{*}{=} \frac{d}{dt}\sum_n \delta\vec\varphi\cdot(\vec r_n\times\vec p_n) \\ &= \delta\vec\varphi\cdot\frac{d}{dt}\sum_n \vec r_n\times\vec p_n \qquad \forall \text{ (zeitunabh.) Drehungen } \delta\vec\varphi \end{aligned}$$

(Spatprodukt zyklisch vertauschbar)

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\sum_n \vec r_n\times\vec p_n = \dot{\vec L}_{Gesamt} = 0$$

$\rightsquigarrow$ all diese Erhaltungssätze sind Spezialfälle des <u>Noether-Theorems:</u>

(hier: qualitative Herleitung) [Emmy Noether, 1915]

- beschreibe globale Invarianzen mit Hilfe von Generatoren (Q_n) einer Koord.-Transformation in lokaler Form,

$$q_n \to q_n' \equiv q_n + \varepsilon Q_n \quad , \quad \varepsilon \ll 1 .$$

- def. $\delta L \equiv L(q', \dot q', t) - L(q, \dot q, t) = \varepsilon \frac{df}{dt}$ ← (erlaubt, vgl. S. 26)

aber $$\delta L = \sum_n \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_n}}_{\overset{(EL)}{=}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_n}}\varepsilon Q_n + \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot q_n}\varepsilon \dot Q_n = \varepsilon \frac{d}{dt}\sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot q_n}Q_n$$

also ist $$\varepsilon \frac{d}{dt}\Big[\underbrace{f - \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot q_n}Q_n}_{\equiv J}\Big] = 0 \quad \forall \varepsilon$$

J: <u>Noether-Strom</u>

<u>Bsp:</u> (räumliche Translationen) sei q_a zyklisch $\Rightarrow Q_n = \delta_{na}$, $\dot Q_n = 0$, $f = 0$

$$\Rightarrow J = -\sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot q_n}\delta_{na} = -p_a$$

<u>Bsp:</u> (zeitliche Translationen) $q_n' = q_n(t+\varepsilon) = q_n + \varepsilon \dot q_n \Rightarrow Q_n = \dot q_n$

es gilt $\delta L = L(q', \dot q') - L(q, \dot q) = \varepsilon \frac{dL}{dt} \Rightarrow f = L$

$$\Rightarrow J = L - \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot q_n}\dot q_n = -E$$

Bem. • Erhaltungsgrößen sind <u>additiv</u>:

für $L = L_A + L_B$ (A, B: nicht miteinander wechselwirkende Untersysteme)

folgt $J = J_A + J_B$ (da J linear in L, s.o.)

• betrachte <u>Boosts</u> (vgl. §1.3, S. 9):

$$q_n' = q_n - \varepsilon u_n t \quad \Rightarrow \quad Q_n = -u_n t \quad , \quad \dot{q}_n' = \dot{q}_n - \varepsilon u_n$$

f ist nun nicht-trivial;

Bsp: freie Massenpunkte

$$\delta L = \sum_n \frac{m_n}{2} (\dot{q}_n')^2 - \sum_n \frac{m_n}{2} \dot{q}_n^2$$

$$= \sum_n \frac{m_n}{2} \left(-2\varepsilon u_n \dot{q}_n + \varepsilon^2 u_n^2\right) \overset{!}{=} \varepsilon \frac{df}{dt} + O(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow f = -\sum_n m_n u_n q_n$$

$$\Rightarrow J = f - \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} Q_n = \sum_n \left(-m_n u_n q_n - m \dot{q}_n (-u_n t)\right)$$

$$= \sum_n m u_n (\dot{q}_n t - q_n)$$

$\rightsquigarrow J = \text{const}$ $(\dot{J} = 0)$, aber abhängig vom Anfangs-Ortsvektor

• für eine <u>allgemeine Herleitung</u> des Noether-Theorems (s. z.B. [Goldstein/Poole/Safko, § 13.7)

betrachtet man auch $t \to t' = t + \varepsilon X$,

$$q_n(t) \to q_n'(t') = q_n(t) + \varepsilon Q_n \qquad \left(q_n'(t') - q_n(t) \neq q_n'(t) - q_n(t) \right).$$

Ausgangspunkte der allg. Herleitung sind

<u>Forminvarianz</u> $L'(q'(t'), \dot{q}'(t'), t') = L(q'(t'), \dot{q}'(t'), t')$

<u>Skaleninvarianz</u> $S' = \int_{t_1'}^{t_2'} dt' \, L'(q'(t'), \dot{q}'(t'), t') = \int_{t_1}^{t_2} dt \, L(q(t), \dot{q}(t), t)$

und es folgt der allg. Noether-Strom

$$J = \left(\sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_n - L \right) X - \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} Q_n$$

2.5 Beschreibung dissipativer Systeme
(zerstreuend)

bisher: EL Gln $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0$, $n = 1, \dots, s$

beschreibt mit $L = T - V$ die Bewegung von Massenpunkten unter dem Einfluss konservativer Kräfte

berücksichtige auch nichtkonservative Kräfte $F_n^{(nc)}$ (vgl. §1.2: verrichtete Arbeit entlang geschloss. Kurven)

via $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = F_n^{(nc)}$

wichtigste Klasse: Reibungskräfte

sind meist proportional zur Geschwindigkeit, $F_n^{(nc)} = -k_n \dot q_n$
((keine Reibung bei $\vec v = 0$; Taylor für kleine $\vec v$ startet linear))

def $\mathcal{F} \equiv \frac{1}{2}\sum_n k_n \dot q_n^2$ Rayleighsche Dissipationsfunktion

dann ist $F_n^{(nc)} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot q_n}$

also $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot q_n}$$

Bem.:
- diese Variante der EL Gln folgt nicht aus einem Wirkungsprinzip; kann nicht 'first principle' sein
- bekommen Bwgln aus zwei skalaren Funktionen $L, \mathcal{F}$
- kartesische Reibungskräfte $\vec F_a^{(nc)}$ $(a = 1..N)$ umrechnen in generalisierte Reibungskräfte $F_n^{(nc)}$:

$$F_n^{(nc)} = \sum_{a=1}^{N} \vec F_a \cdot \frac{\partial \vec r_a}{\partial q_n}$$

meist ist $\vec F_a^{(nc)} = -h_a(v_a)\frac{\vec v_a}{v_a}$, $a = 1..N$, $v_a = |\vec v_a|$
((z.B. Haft-/Gleit-/Roll-Reibung : $h = \text{const}$
in Fluiden : $h \sim v$ (kleine v), $h \sim v^2$ ($\to$ Wirbel, Turbulenzen)))

dann ist $\mathcal{F} = \sum_{a=1}^{N}\int_0^{v_a} dv_a\, h_a(v_a)$