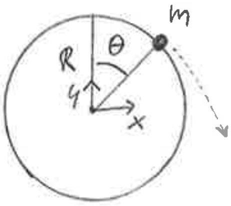
Bsp



Bei welchem Winkel θ_{escape} verlässt der Massenpunkt die Kugeloberfläche?

Koordinatenwahl: $r, \theta \quad \Rightarrow \quad (x,y) = r(\sin\theta, \cos\theta)$

Zwangsbedingung: $f \equiv r - R = 0$ (auf Oberfläche)

$$T = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2) = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2)$$

$$V = mgy = mgr\cos\theta$$

$$\Rightarrow \tilde L = T - V + \lambda f = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) - mgr\cos\theta + \lambda(r-R)$$

(1) $f = 0 \quad \Rightarrow \quad r = R$

(3) $\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = mR^2\dot\theta \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial\theta} = -mgR\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \ddot\theta = \frac{g}{R}\sin\theta$

(2) $\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde L}{\partial \dot r} - \frac{\partial \tilde L}{\partial r} \stackrel{!}{=} 0 \qquad = \frac{d}{dt}(m\dot r) - \left(mr\dot\theta^2 - mg\cos\theta + \lambda\right)$

betrachte (3)$\cdot\dot\theta$ $\quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\dot\theta^2 = -\frac{g}{R}\frac{d}{dt}\cos\theta$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\dot\theta^2 = -\frac{g}{R}\cos\theta + const_t$

AB $\dot\theta = 0$ bei $\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot\theta^2 = \frac{2g}{R}(1-\cos\theta)$

betrachte (2): $\quad \dot r = 0$ (wegen $r = R$)

$\Rightarrow \lambda = -mR\dot\theta^2 + mg\cos\theta = mg(3\cos\theta - 2)$

Zwangskraft $= \lambda\frac{\partial f}{\partial r} = \lambda = mg(3\cos\theta - 2)$

$\rightsquigarrow$ Massenpkt. verlässt Oberfläche wenn $\vec F_z = \vec 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos\theta_{escape} = \frac{2}{3}$

2.4 Symmetrien + Erhaltungssätze

→ wichtiger Vorteil des Lagrange-Formalismus (ggü. Newton):
Zusammenhang zwischen Symm. ⇔ Erh. Sätzen verdeutlichen

- Invarianz unter Zeittranslationen ⇒ Energieerhaltung
  (bzw. Homogenität der Zeit)

L hängt nicht explizit von t ab: $L = L(q, \dot{q})$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} L = \sum_n \Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_n}}_{= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right) \text{ wegen Euler-Lagrange Gln}} \dot{q}_n + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \left(\frac{d}{dt} \dot{q}_n\right)\Big)$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_n \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} E = 0 \qquad \text{mit} \qquad E \equiv \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_n - L$$

⇝ die *so* definierte Energie E ist also erhalten;
stimmt dies mit der üblichen Def überein?

sei $L = T - V$, $\quad T \equiv \frac{1}{2} \sum_{a,b} f_{ab}(q)\, \dot{q}_a \dot{q}_b$

$\left(T = \frac{1}{2} \sum_n m_n \dot{\vec{x}}^2 \text{ ist Spezialfall} \right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} - \cancelto{0}{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_n}} = \partial_{\dot{q}_n} \frac{1}{2} \sum_{a,b} f_{ab}(q)\, \dot{q}_a \dot{q}_b$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{a,b} f_{ab}(q) \left(\delta_{an} \dot{q}_b + \dot{q}_a \delta_{bn} \right)$$

$$\Rightarrow E = \sum_n \dot{q}_n \frac{1}{2} \sum_{a,b} f_{ab}(q) \left(\delta_{an} \dot{q}_b + \dot{q}_a \delta_{bn} \right) - T + V$$

$$= \sum_{a,b} f_{ab}(q)\, \dot{q}_a \dot{q}_b - \frac{1}{2} \sum_{a,b} f_{ab}(q)\, \dot{q}_a \dot{q}_b + V = T + V \quad \checkmark \text{ok}$$

- <u>räumliche Translationsinvarianz ⇒ (verallg.) Impulserhaltung</u>

L hängt nicht von einer bestimmten verallgemeinerten Koordinate q_i ab : $L = L(q_1, \dots, \cancel{q_i}, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$

⇝ dieses q_i nennt man <u>zyklische Koordinate</u>

L ist also invariant unter $q_i \to q_i + l$; $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

<u>def</u> $p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ der zu q_i <u>kanonisch konjugierte Impuls</u>

damit ist $\dot{p}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \overset{\text{(Euler-Lagrange)}}{=} \frac{\partial L}{\partial q_i} \overset{(q_i \text{ zyklisch})}{=} 0$

⇝ kanonisch konj. Impuls ist erhalten!

<u>Bsp:</u> betrachte N Massenpunkte mit Zentralkräften $V = \sum_{a,b} V_{ab}(\vec{r}_a - \vec{r}_b)$

⇝ wähle verallg. Koord.: $\vec{r}_1$, $\vec{r}_{a1} \equiv \vec{r}_a - \vec{r}_1$ $(a = 2, \dots, N)$

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \sum_{a=2}^{N} \frac{m_a}{2}(\dot{\vec{r}}_1 + \dot{\vec{r}}_{a1})^2 - \sum_{a,b=2}^{N} V_{ab}(\vec{r}_{a1} - \vec{r}_{b1})$$

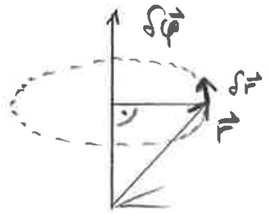
$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_1^i} = m_1 \dot{r}_1^i + \sum_{a=2}^{N} m_a(\dot{r}_1^i + \dot{r}_{a1}^i) = m_1 \dot{r}_1^i + \sum_{a=2}^{N} m_a \dot{r}_a^i$$

$= p^i_{\text{Gesamt}}$ erhalten, da $\vec{r}_1$ zyklisch : $L(\cancel{\vec{r}_1})$

- <u>Isotropie des Raumes ⇒ Drehimpulserhaltung</u>

d.h. Invarianz unter Drehungen

betrachte kleine Drehung



$\delta\vec{r} = \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}$

(vgl. §1.3, S.9: $\dot{\vec{e}} = \vec{\omega} \times \vec{e}$)