2.2 Prinzip der kleinsten Wirkung

bzw. (Fermat-, Maupertius-, d'Alembert-) Hamilton-Prinzip

Beschreibe ein System (mit s „Freiheitsgraden")
durch verallgemeinerte Koordinaten (müssen nicht kartesisch sein) $q_1, \dots, q_s$.

(z.B.: N Massenpunkte, $s = 3N$
$\{q_i\} = \{x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N\}$
oder $\{q_i\} = \{r_1, \theta_1, \varphi_1, r_2, \theta_2, \varphi_2, \dots, r_N, \theta_N, \varphi_N\}$)

Die Zeitableitungen $\dot q_1, \dots, \dot q_s$ heißen verallgemeinerte Geschwindigkeiten.

Defs $q \equiv (q_1, \dots, q_s)$, $\dot q \equiv (\dot q_1, \dots, \dot q_s)$

$L(q, \dot q, t) \in \mathbb{R}$ Lagrange-Funktion

$S[q] \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q, \dot q, t)$ Wirkung

$\left(\text{vgl. § 2.1, mit } \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ f \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} t \\ q(t) \\ L \end{pmatrix} \right)$

Das Hamiltonsche Prinzip: S ist extremal, bzw $\delta S = 0$

$\rightsquigarrow$ mit Euler-Glg folgen dann die

Euler-Lagrange-Gleichungen $$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0} \quad \forall n$$

Bem.:
- dies sind Dgl'n 2. Ordnung (wie Newton II!)
- L ist nicht eindeutig:

  sei $\tilde L \equiv L + \frac{d}{dt} g(q(t), t)$

  dann $\tilde S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \tilde L = S + \int_{t_1}^{t_2} dt\, \partial_t g = S + g(q_2, t_2) - g(q_1, t_1)$

  aber bei Variation $q \to q + \delta q$, $\delta q(t_1) = 0 = \delta q(t_2)$
  bleiben die Randterme unverändert
  $\Rightarrow$ haben keinen Einfluss auf Euler-Lagrange-Gln!

- bisher keine Annahmen über die Form von L.

  ⇝ sehr allg. Prinzip / haben noch viel Wahlfreiheit

  ⇝ Massenpunkte in konservativem Kraftfeld:

  wähle $L \equiv T - V$ (mit $\vec{r}_n \leftrightarrow q$, $\dot{\vec{r}}_n \leftrightarrow \dot{q}$)

$$\overset{!}{=} \sum_n \frac{m_n}{2} \dot{\vec{r}}_n^{\,2} - V(\vec{r}_n)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n^i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_n^i} = m_n \dot{x}_n^i \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial x_n^i} = -\frac{\partial V}{\partial x_n^i}$$

(hier keine Summe über n)

(Euler-Lag.)
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n^i} - \frac{\partial L}{\partial x_n^i} = m_n \ddot{x}_n^i + \frac{\partial V}{\partial x_n^i} = 0 \quad \forall n$$

$$\Leftrightarrow m_n \ddot{\vec{r}}_n = -\vec{\nabla}_n V$$ (vgl. Behauptg S. 22)

⇝ Newton II folgt aus Extremierung der Wirkg $S = \int (T-V)$

2.3 Randbedingungen / Zwangsbedingungen

Einschränkung der Bewegung durch Gleichungen der Form

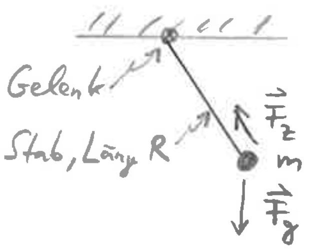
$$f_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, t) = 0 \quad , \quad \alpha = 1, \dots, k$$

(keine $\dot{\vec{r}}$) ⇒ <u>holonome Zwangsbedingungen</u> (vgl. S. 22)

(("Skleronom" / "rheonom" ⟺ ohne / mit Zeitabhängigkeit))

$\underbrace{\text{Skleronom}}_{\text{starr}}$ / $\underbrace{\text{rheonom}}_{\text{fließend}}$

<u>Bsp</u> (Pendel)

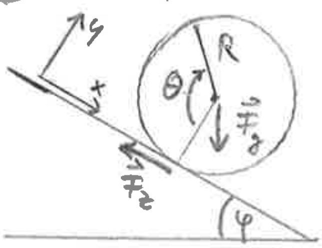


wähle Ursprung im Gelenk

Schwingung in (x,y)-Ebene

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_1 = x^2 + y^2 - R^2 \\ f_2 = z \end{array} \right\}$$

<u>Bsp</u> (Reifen) Rollen auf schiefer Ebene mit Reibung



$$\{x = R\theta\} \Leftrightarrow \{f_1 = x - R\theta\}$$

⇝ <u>Zwangskräfte</u> $\vec{F}_z$ erzwingen die Rand/Zwangsbedingungen; Behandlung mit Newtonschen Gesetzen kann sehr mühsam sein!

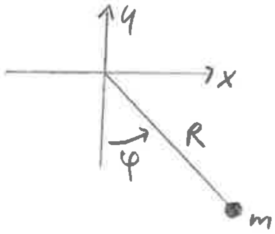
⇝ Im Lagrange-Formalismus geht man nach "Rezept" vor:

(a) Führe $s = 3N - k$ verallgemeinerte Koord. $q_1, \dots, q_s$ ein, welche die Konfigurationen des Systems parametrisieren, die die Zwangsbedingungen erfüllen

(b) Drücke die Lagrange-Funktion $L = T - V$ durch $q, \dot{q}$ aus; V enthält nur die Beiträge, die <u>nicht</u> Zwangskräfte verursachen

(c) Löse die Euler-Lagrange-Gln $\frac{\partial L}{\partial q_n} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}$, $n = 1, \dots, s$

<u>Bsp</u> (Pendel)



(a) $q \equiv \varphi \quad (s = 1)$

$$(x, y) = R(\sin\varphi, -\cos\varphi)$$

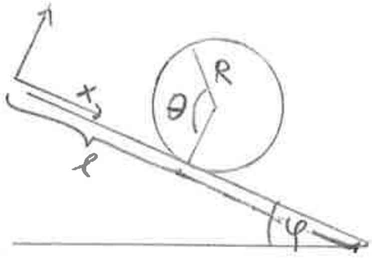
(b) $T = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}R^2\dot{\varphi}^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \frac{m}{2}R^2\dot{\varphi}^2$

$V = mgy = -mgR\cos\varphi$

$\Rightarrow L = T - V = \frac{m}{2}R^2\dot{\varphi}^2 + mgR\cos\varphi$

(c) $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgR\sin\varphi$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi} \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{g}{R}\sin\varphi$

<u>Bsp</u> (Reifen)



(a) $q \equiv x$; $\theta = x/R$ — kin. E Drehung

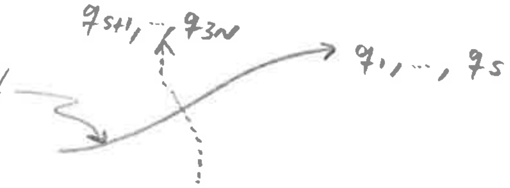
(b) $T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2 = m\dot{x}^2$ — kin. E Schwerpkt

$V = mg(\ell - x)\sin\varphi$

$\Rightarrow L = T - V = m\dot{x}^2 - mg(\ell - x)\sin\varphi$

(c) $\frac{\partial L}{\partial x} = mg\sin\varphi$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x}$ $\Rightarrow$ $\ddot{x} = \frac{g}{2}\sin\varphi$

<u>Bem.</u>:
- die (holonomen) Zwangskräfte sind also per 'Rezept' eliminiert
- zur Begründung des 'Rezepts':
  schreibe alle 3N Koord. des Systems wie folgt:



es gilt $f_\alpha(q_1, \ldots, q_s; q_{s+1}=0, \ldots, q_{3N}=0) = 0$ $\forall\, \alpha = 1, \ldots, k$

$\Rightarrow \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_n} = 0$ für $n = 1, \ldots, s$

<u>def</u> $\tilde{L} \equiv L + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha f_\alpha$ (λ_α heißen <u>Lagrange-Multiplikatoren</u>)

betrachte $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}$ als neue Koord. ⇝ insgesamt $3N+k$ verallg. Koord.

dann folgt (EL ≡ Euler-Lagrange):

(1) EL mit λ_α $\Rightarrow$ $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \lambda_\alpha} = f_\alpha = \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\lambda}_\alpha} = 0$ ✓ ok

(2) EL mit $q_{s+1} \ldots q_{3N}$ $\Rightarrow$ $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} - \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_n} = 0$, $n = s+1 \ldots 3N$

⇝ ermöglicht die Bestimmung der λ_α.

⇝ könnte daraus Zwangskräfte ablesen:

$$\text{"}\frac{m_n}{2}\ddot{q}_n\text{"} + \frac{\partial V}{\partial q_n} - \text{Zwangskräfte} = 0$$

(3) EL mit $q_1 \ldots q_s$ $\Rightarrow$ $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0$, $n = 1, \ldots, s$

((wegen $\partial_{q_n} f_\alpha(q_1 \ldots q_s; 0 \ldots 0) = 0$))