2. Lagrange-Formalismus

→ s. z.B. [Goldstein / Poole / Safko, §2]

bisher: sehr einfache Systeme

⇝ Koordinaten, Kräfte ⇝ Newton II ⇝ Lsg

(wir hatten meist <u>holonome Randbedingungen</u> vorliegen:
Bewegung eingeschränkt durch Gleichungen $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, t) = 0$
→ konnten dies durch <u>verallgemeinerte Koordinaten</u>, z.B. Polarkoordinaten, Winkel etc. berücksichtigen)

oft: Systeme mit komplizierteren Einschränkungen

z.B. <u>nichtholonome Randbedingungen</u>

(Bsp: Kugel rutscht von Kugel herunter
$\vec{r}^2 - R^2 \geq 0$)

(Bsp: Körper <u>rollt</u>, ohne zu rutschen
$\dot{\vec{r}} = 0$ am Berührungspunkt)

⇝ Zwangskräfte a priori unbekannt

→ Umformulierung der Mechanik, die ohne Zwangskräfte in den Bewgln. auskommt

2.1 Variationsrechnung

(brauchen wir für diese Umformulierung;
die Leitidee ist (s. §2.2) die folgende)

<u>Beh.:</u> Massenpkt. bewegt sich via $m\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} V$

⇔ Massenpkt. bewegt sich auf Bahnkurve, welche den Wert eines Integrals ("<u>Wirkung</u>") <u>extremiert</u>
(meist: minimiert)

→ benötigen neue Methode zur mathematischen Formulierung dieses Prinzips: <u>Variationsrechnung</u>

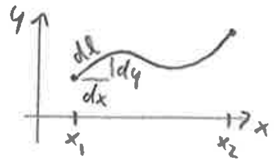
Funktion: Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto y(x)$

<u>Funktional</u>: Abbildung $V \to \mathbb{R}$; $y \mapsto F[y]$

↑ Funktionenraum mit best. Eigenschaften, meist: reell, stetig, diff'bar

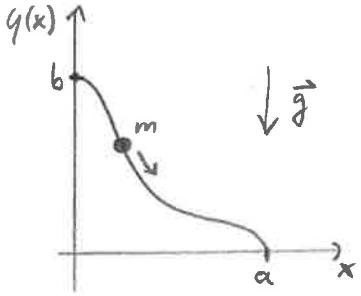
<u>Bsp</u>:

- $F[y] = y(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; y(x)\, \delta(x - x_0)$
- $F[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \; f(y(x), y'(x), x)$ mit Funktion f
- Länge einer Bahnkurve



$$\ell = \int d\ell = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + (y'(x))^2} = \ell[y]$$

- <u>Brachistochronen</u>-Problem
  kürzeste (Lauf-) Zeit [im homogenen Gravitationsfeld]
  (Johann Bernoulli, 1667-1748 → Variationsrechnung)



Massenpkt ruht am Anfang;
reibungsfreie Bewegung von $b \to a$

$$t_{ba} = \int dt = \int \frac{d\ell}{v} = \int_0^a dx \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{v(x)}$$

aus E-Erhaltung: $\frac{1}{2} m v^2 = mg(b - y)$

$\Leftrightarrow v = \sqrt{2g(b-y)}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a dx \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{b - y(x)}} = t_{ba}[y]$$

Extremierung eines Funktionals $\mathcal{F}[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(y, y', x)$

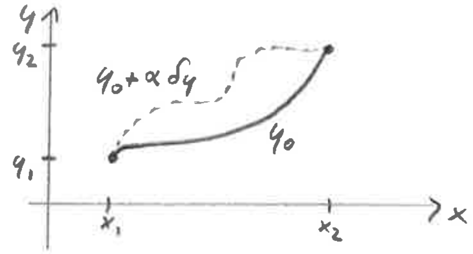
Ann.: sei die Funktion y_0 ein Extremum (z.B. Minimum) von $\mathcal{F}[y]$:

$\mathcal{F}[y] \geq \mathcal{F}[y_0] \quad \forall$ Funktionen y mit $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$

sei $\delta y(x)$ eine beliebige (stetige, diff'bare) Fkt mit $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$

→ betrachte $\mathcal{F}[y_0 + \alpha \delta y]$ als Funktion von $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \partial_\alpha \mathcal{F}[y_0 + \alpha\delta y]\big|_{\alpha=0} \overset{!}{=} 0 \quad (\forall \delta y)$

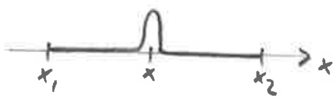


es ist
$$\partial_\alpha \mathcal{F}\big|_{\alpha=0} = \partial_\alpha \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(y_0 + \alpha\delta y,\, y_0' + \alpha \delta y',\, x)\Big|_{\alpha=0}$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \Big[\delta y\, (\partial_y f) + \underbrace{\delta y'\, (\partial_{y'} f)}_{= \partial_x(\delta y(\partial_{y'} f)) - \delta y\, \partial_x \partial_{y'} f}\Big]_{y=y_0}$$

(totale Abl.: $\frac{d}{dx}$)

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx\, \delta y \left[\partial_y f - \partial_x \partial_{y'} f\right] + \underbrace{\left(\delta y\, (\partial_{y'} f)\right)\Big|_{x=x_1}^{x_2}}_{=0,\ \text{da } \delta y(x_{1,2}) = 0}$$
$$\overset{!}{=} 0$$

muss (s.o.) für alle $\delta y(x)$ gelten;
z.B. insbesondere für solche:



$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0} \quad \forall x \,, \quad \underline{\text{Euler-Gleichung}}$$

((oder $(\partial_y - \partial_x \partial_{\partial_x y}) f = 0$))

Verallgemeinerung: für N Funktionen y_n, $n = 1, \dots, N$

bekommt man N Gleichungen $\frac{\partial f}{\partial y_n} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_n'} = 0 \quad \forall x, n$

(Beweis: wähle $\delta y_n \neq 0$ nur für bestimmten Wert n, etc.)

Bsp: Brachistochronen-Problem (s.S. 23: $f = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{b-y}}$)

$$\partial_y f = +\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{(b-y)^{3/2}}, \quad \partial_{y'} f = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}y'}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{b-y}}, \quad \partial_x\partial_{y'} f = \text{lang...}$$

aber
$$\partial_x\left[y'\partial_{y'}f - f\right] = y''\partial_{y'}f + y'\partial_x\partial_{y'}f - y'\partial_y f - y''\partial_{y'}f \underbrace{(-f')}_{=0}$$

$f(y,y',\cancel{x})$

$$= y''(\cancel{\partial_{y'}f - \partial_{y'}f}) + y'(\partial_x\partial_{y'}f - \partial_y f)$$

$$= 0 \quad \text{wegen Euler-Glg.}$$

$\Rightarrow$ [...] ist eine Konstante (in x)

folgt (s.o.), da f nicht explizit von x abhängt!

([..] wird oft als erstes Integral der Euler-Glg bezeichnet)

$$\Leftrightarrow \frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{b-y}} - \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{b-y}}\cdot\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{1+(y')^2}} = \text{const.}$$

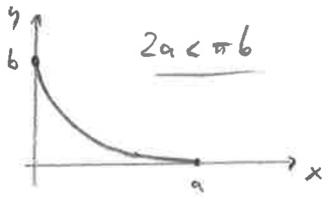
$$\Rightarrow \sqrt{1+(y')^2}\sqrt{b-y} = -\frac{1}{\text{const.}} \quad \Rightarrow \quad (1+(y')^2)(b-y) = \frac{1}{(\text{const.})^2} \equiv 2A$$

Bem.: Lsg ist Zykloide:

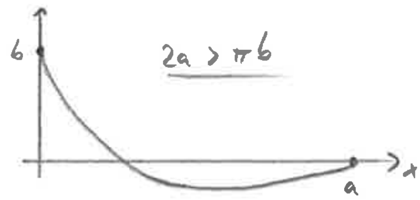
$$x(\varphi) = A(\varphi - \sin\varphi), \quad y(\varphi) = b + A(\cos\varphi - 1)$$

((check: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\varphi}{dx/d\varphi} = \frac{-A\sin\varphi}{A(1-\cos\varphi)}$,

$(1+(y')^2)(b-y) = \frac{(1-c)^2+s^2}{(1-c)^2}A(1-c) = 2A$ ✓✓))



$2a < \pi b$



$2a > \pi b$

$\rightsquigarrow$ Darstellung z.B. von Mathematica,

ParametricPlot[{A(φ-sin φ), b+A(cos φ-1)}, {φ,0,2π}]

wählen, z.B. $=1$