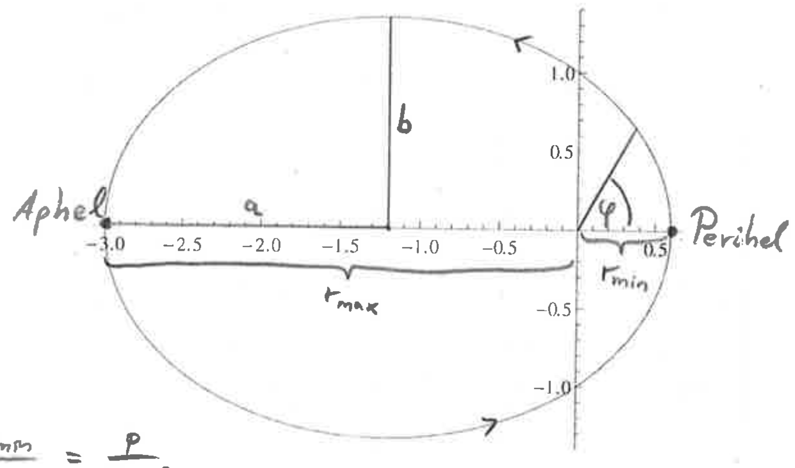
- Analyse der Bahnkurve

z.B. $E<0 \Rightarrow e<1$

$\rightarrow$ Planetenbahnen sind Ellipsen mit Sonne in einem Brennpunkt $(r=0)$ „Kepler I"

p e

```
PolarPlot[1 / (1 + 2 / 3 Cos[phi]), {phi, 0, 2 Pi}]
```



$\rightarrow$ Periheldistanz $= r_{min} = \frac{p}{1+e}$

Apheldistanz $= r_{max} = \frac{p}{1-e}$

große Halbachse $a = \frac{r_{max}+r_{min}}{2} = \frac{p}{1-e^2}$

kleine Halbachse b, in kartes. Koord. $y(r,\varphi) = r\sin\varphi = \frac{p\sin\varphi}{1+e\cos\varphi}$

oben $0 \stackrel{!}{=} \partial_\varphi y = \frac{e+\cos\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2} \Leftrightarrow \cos\varphi = -e \Leftrightarrow b = \frac{p\sqrt{1-e^2}}{1-e^2}$

$\rightarrow$ für die Umlaufzeit T gilt (S.15: $\frac{df}{dt} = \frac{L}{2\mu}$)

$T = \frac{2\mu f}{L}$, wobei f = Flächeninhalt Ellipse $= \pi a b$

$\Rightarrow T^2 = \frac{4\mu^2 f^2}{L^2} = \frac{4\mu^2\pi^2 p}{L^2} a^3 = \frac{4\mu\pi^2}{\alpha} a^3 = \frac{4\pi^2}{\gamma(m_1+m_2)} a^3$

$\rightsquigarrow$ Quadrate der Umlaufzeiten von Planeten sind proportional zur dritten Potenz der großen Bahnhalbachse „Kepler III"

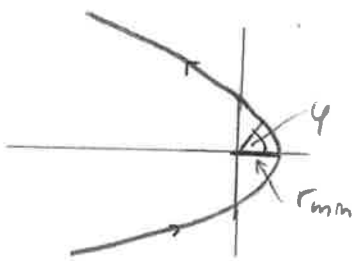
- ungebundene Bewegung

$\rightarrow$ $\alpha>0$ (anziehende Kraft), $E \geq 0 \Rightarrow e \geq 1$

$r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$

$r_{min} = \frac{p}{1+e}$ bei $\varphi = 0$

$r \to \infty$ bei $\cos\varphi \to -\frac{1}{e}$

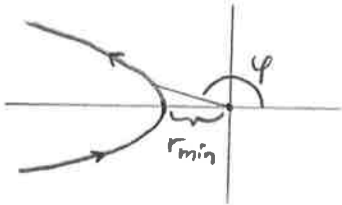


$\rightarrow$ $\alpha<0$ (abstoßende Kraft), Lösung wie oben,

mit $p = \frac{L^2}{\mu\alpha} < 0$: $p = -|p|$, $E>0 \Rightarrow \varepsilon > 1$

$r = \frac{-|p|}{1+e\cos\varphi}$

$r_{min} = \frac{-|p|}{1-e} > 0$ bei $\varphi = \pi$



1.6 Streuung im Zentralkraftfeld

historisch: Planetenbahnen → Interesse an Zentralkräften

heute: wichtig auch wenn Planeten → Teilchen: "Streuung"

z.B. Atome (aber: Quanteneffekte ?!)

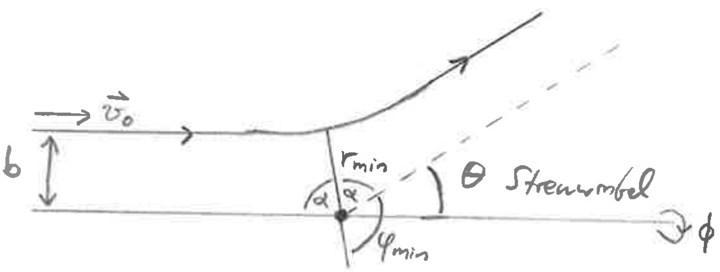
→ klass. Lösungen bleiben in guter Näherung richtig

→ Beschreibung von Streuung dieselbe; hier "Sprache lernen"

- betrachte ungebundene Bewegung (§1.5, S.18)

((anziehende Kraft, $E \geq 0$; abstoßende Kraft, $E > 0$))

aus Sicht des "Kometen"



⇝ Stöße bzw Streuung

wichtig z.B. in Teilchenphysik: Positron-Proton-Streuung etc.

→ Strukturuntersuchung!

⇝ aus Skizze: $2\alpha + \Theta = \pi$, $\alpha + \varphi_{min} = \pi$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\Theta = 2\varphi_{min} - \pi}}$

⇝ Annahme: $\lim_{r\to\infty} V(r) = 0$

$\Rightarrow$ $E = T + V = \frac{\mu}{2} v_0^2$, $L = |\mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = \mu b v_0$

damit wird ((allg. Lsg §1.5, S.16: $\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2} \frac{L}{\sqrt{2\mu[E - V(r')] - \frac{L^2}{r'^2}}}$))

$$-(\varphi_{min} - \pi) = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \frac{\mu b v_0}{\sqrt{2\mu[\frac{\mu}{2}v_0^2 - V(r)] - (\mu b v_0/r)^2}}$$

$\dot{\varphi} < 0$

$\varphi(r\to\infty) = \varphi_{min}$

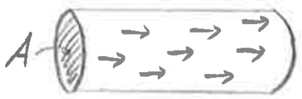
$\varphi(r_{min}) = \pi$

$$= \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \frac{b}{\sqrt{1 - \frac{2V(r)}{\mu v_0^2} - \frac{b^2}{r^2}}}$$

r_{min} aus $\frac{2V(r_{min})}{\mu v_0^2} + \frac{b^2}{r_{min}^2} \stackrel{!}{=} 1$

- definiere einen Streu- oder Wirkungsquerschnitt

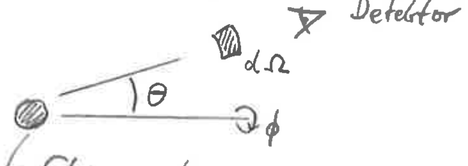
Anfangszustand: z.B. Teilchenstrahl in Kern/Teilchenphysik



→ alle T. haben gleichen Impuls $\vec{p}$

→ T. sind gleichförmig über Querschnitt A verteilt

Endzustand:



def Wirkungsquerschnitt σ: $\underbrace{N_s}_{\text{\# der gestreuten Teilchen}} = \frac{\sigma}{A} \underbrace{N_{ein}}_{\text{\# der Teilchen im Strahl}}$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma \equiv \frac{N_s}{N_{ein}/A} = \frac{\left(N_s/\text{Zeit}\right)}{\left(\frac{N_{ein}}{A\cdot\text{Zeit}}\right)} = \frac{\text{Ereignisrate}}{\text{Teilchenstromdichte}}$$

oft "Luminosität"

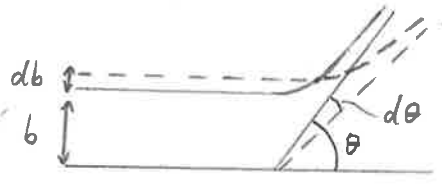
→ zähle (Detektor) gestreute Teilchen mit $\theta_1 < \theta < \theta_2$,

schreibe $\sigma = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)$ ← "differentieller Wirkungsquerschnitt"

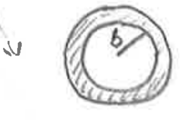
((können bei ϕ-Abhängigkeit noch $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ definieren, $d\Omega \equiv d\phi\, d\theta \sin\theta$))

- für $E, V(r)$ gegeben ⇒ θ ist Funktion von b (s.S. 19)

(($\theta = 2\varphi_{min} - \pi = \pi - 2(\pi - \varphi_{min}) = \pi - 2\int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \frac{b}{\sqrt{\;\;}}$, r_{min} aus $\sqrt{\;\;} = 0$))



alle T. mit Stoßparameter zwischen $b, b+db$ werden in den Winkelbereich zwischen $\theta, \theta - d\theta$ gestreut.



Flächenelement $d\sigma = 2\pi b\, db = 2\pi b \left|\frac{db}{d\theta}\right| d\theta$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\theta} = 2\pi b \left|\frac{db}{d\theta}\right|$$

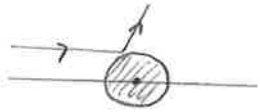
Bsp.: (Streuung harter Kugeln)

sei $V(r) = \begin{cases} \infty & \text{für } r < R \\ 0 & \text{für } r \geq R \end{cases}$

((z.B. zwei Billiardkugeln, Masse m, Radius a $\Rightarrow \mu = \frac{m}{2}$, $R = 2a$))

betrachte $b < R$ (da keine Streuung / Stöße bei $b > R$)

$r_{min} = R$:



$$\Rightarrow \Theta = \pi - 2 \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \frac{b}{\sqrt{1 - b^2/r^2}} \qquad \text{Subst: } u = \frac{b}{r}, \; du = -\frac{b\,dr}{r^2}$$

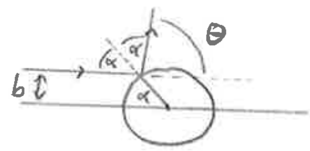
(s. Bsp 5.17)

$$= \pi + 2 \int_{b/R}^{0} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pi - 2 \left[\arccos u \right]_{u=b/R}^{0} = \cancel{\pi} - \cancel{2\tfrac{\pi}{2}} + 2 \arccos \frac{b}{R}$$

$$\Rightarrow \underline{b(\theta) = R \cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)}$$

$$\rightsquigarrow \frac{d\sigma}{d\theta} = 2\pi b \left| \frac{db}{d\theta} \right| = 2\pi R \cos\tfrac{\theta}{2} \; \tfrac{R}{2} \sin\tfrac{\theta}{2} = \frac{\pi R^2}{2} \sin\theta$$

Bem
- haben also (totalen) Wirkungsquerschnitt
  $$\sigma = \int_0^\pi d\theta \, \frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{\pi R^2}{2} \left[-\cos\theta \right]_{\theta=0}^{\pi} = \pi R^2 \qquad \checkmark\checkmark \text{ sinnvoll!}$$
- $b(\theta)$ hätten wir auch geometrisch herleiten können,
  $b = R \sin\alpha$, $2\alpha + \theta = \pi$



Fazit Streuung:
- haben nur $E, \vec{p}$ - Erhaltung benutzt
  $\rightsquigarrow$ elementare Herleitung ; weitreichende Gültigkeit
- Erhaltungssätze gelten auch in Quantenmechanik
  $\rightsquigarrow$ Einzelheiten des Streuprozesses unwichtig
  nur einlaufende / auslaufende T. von Interesse
  betrachte Umgebung des Streuzentrums als "black box"
- Herleitung ist also auch für z.B. Neutron-Proton-Streuung gültig
  (für kleine E; haben relativistische Effekte vernachl.)