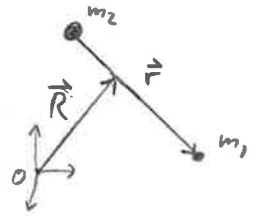
Spezialfall: $N=2$

betrachte 2 T. mit Ortsvektoren $\vec r_i$, $i=1,2$

ohne externe Kräfte ("abgeschlossenes System")

Bwgln: $m_1 \ddot{\vec r}_1 = \vec F_{21}$

$m_2 \ddot{\vec r}_2 = \vec F_{12} = -\vec F_{21}$



Schwerpunkt $\vec R = \frac{m_1 \vec r_1 + m_2 \vec r_2}{m_1+m_2}$

Relativkoord. $\vec r = \vec r_1 - \vec r_2$

$\left(\Leftrightarrow \quad \vec r_1 = \vec R + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec r \quad , \quad \vec r_2 = \vec R - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec r \right)$

$$\Rightarrow \ddot{\vec R} = \frac{m_1\ddot{\vec r}_1 + m_2\ddot{\vec r}_2}{m_1+m_2} = \frac{\vec F_{21} - \vec F_{21}}{m_1+m_2} = \vec 0 \qquad \text{(Impulserhaltung!)}$$

$$\ddot{\vec r} = \ddot{\vec r}_1 - \ddot{\vec r}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec F_{21} = \underbrace{\boxed{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}}}_{\equiv \frac{1}{\mu}} \vec F_{21}$$

← reduzierte Masse μ

- wenn $\vec F_{21}$ nur von $\vec r$ abhängt, folgt die Bwgl.

  $\mu \ddot{\vec r} = \vec F_{21}(\vec r)$

  große Vereinfachung: 2-Teilchen-System zurückgeführt auf Bewegung eines Teilchens, mit Masse μ.

Bsp. Ü9 ⇒

(oft ist $m_2 \gg m_1$; dann $\mu \approx m_1$, $\vec R \approx \vec r_2$, $\vec r_1 \approx \vec R + \vec r$, d.h. Massenpkt. 2 ruht auf Position $\vec R$.)

- wenn zusätzlich $\vec F_{21}(\vec r) \parallel \vec r$ ist (Gravitation ✓ Coulomb ✓, ...), spricht man von einem Zentralkraftproblem.

  ⇝ schreibe $\vec F_{21}(\vec r) = f(r)\vec r$, $r \equiv |\vec r|$ (vgl. Ü5)

  ⇝ $\vec L = \mu \vec r \times \dot{\vec r}$ bleibt erhalten (da $\vec F \parallel \vec r$, s. S. 12)

  ⇝ Bewegung findet in Ebene $\perp \vec L$ statt

  ((da $\vec r \cdot \vec L \sim \vec r \cdot (\vec r \times \dot{\vec r}) = 0$))

1.5 Anwendung: Kepler

s. "Ü 11"

(als wichtigstes Bsp. eines Zentralkraftproblems) für $V = -\alpha/r^2$

Kepler-Problem: $\vec{F} = -\vec{\nabla} V(r)$ mit $V(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$ (Gravitationspot.)

((Newtonsche Gravitationskonstante $\gamma = 6.673\ldots \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2}$))

dies ist
- Zentralkraft $\Rightarrow$ Drehimpulserhaltung
- konservative Kraft $\Rightarrow$ Energieerhaltung

$\rightsquigarrow$ können (drei) Kepler'sche Gesetze aus Erhaltungsgrößen herleiten.

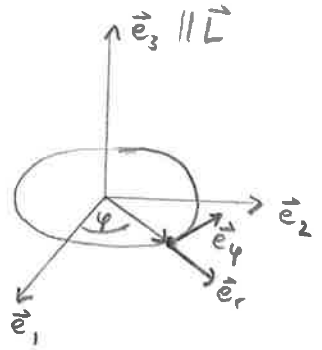
- geeignete Koordinaten: Zylinderkoord.

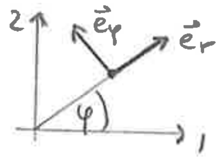
$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$

$\Rightarrow \vec{r} \perp \vec{L}$ und $\dot{\vec{r}} \perp \vec{L}$

$\rightsquigarrow \vec{r}(t)$ bleibt ($\forall t$) in Ebene $\perp \vec{L}$

$\rightsquigarrow$ Bahnkurve lässt sich durch Zylinderkoord. parametrisieren





$$\vec{e}_r = \cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\varphi\, \vec{e}_2$$
$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_1 + \cos\varphi\, \vec{e}_2$$

$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = 0$

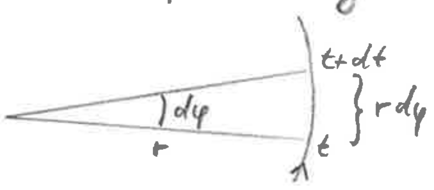
$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi}(-s\,\vec{e}_1 + c\,\vec{e}_2) = \dot{\varphi}\, \vec{e}_\varphi$

$$\vec{r}(t) = r(t)\, \vec{e}_r(t) = r(t) \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

- mit $\vec{r} = r\vec{e}_r$, $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

wird $\vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu r \dot{r}\, \overset{0}{\cancel{\vec{e}_r \times \vec{e}_r}} + \mu r^2 \dot{\varphi}\, \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \mu r^2 \dot{\varphi}\, \vec{e}_3$

Drehimpulserhaltung $\Rightarrow$ $L = |\vec{L}| = \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{const.}$



überstrichenes Flächenelement:

$$df = \frac{1}{2} r\, r d\varphi = \frac{r^2}{2} \dot{\varphi}\, dt = \frac{L}{2\mu} dt$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{L}{2\mu} = \text{const.}$$

"Kepler II" $\rightsquigarrow$ dies ist der Kepler'sche Flächensatz: Ortsvektor überstreicht in gleichen Zeitintervallen gleiche Flächen. $\Big\}\ \forall V(r)$

- benutze Erhaltungsgrößen zur Bestimmung der Bahnkurve $r(\varphi)$

s. auch Ü10 $\nearrow$ Drehimpulserhaltung $\mu r^2 \dot{\varphi} = L = \text{const.}$

Energieerhaltung $T + V = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 + V(r) = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = E = \text{const.}$

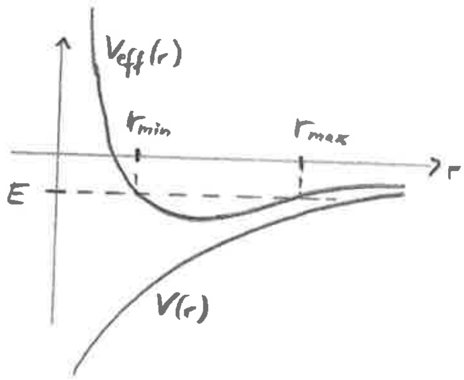
$$\Rightarrow E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)}_{\equiv V_{eff}(r)} \quad \text{effektives Potential}$$

$$\Leftrightarrow \dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left[E - \frac{L^2}{2\mu r^2} - V(r)\right]}$$

$\longrightarrow [\ldots] \geq 0$

$\rightsquigarrow$ Umkehrpunkte folgen aus "=":

$\dot{r} = 0 \Leftrightarrow E = V_{eff}(r)$



$\rightsquigarrow$ unterscheide 2 Arten von Bewegungen:

- "gebunden": $r_{max} < \infty$ $(E < 0)$
- "ungebunden": $r_{max} = \infty$ $(E > 0)$

$\longrightarrow$ Drehimpulserhaltung für $dt \to d\varphi$ benutzen:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{L}{\mu r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\mu r^2}{L}\dot{r} = \frac{r^2}{L}\sqrt{2\mu[E - V(r)] - L^2/r^2}$$

(Vz. für 'auslaufende Bewegung', d.h. $\dot{r} > 0$)

$$\Leftrightarrow d\varphi = \frac{dr\, L}{r^2\sqrt{2\mu[E - V(r)] - L^2/r^2}}$$

$$\Leftrightarrow \varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'^2}\frac{L}{\sqrt{2\mu[E - V(r')] - L^2/r'^2}} \qquad (r_0 \geq r_{min},\ r \leq r_{max})$$

- müssen nun $V(r)$ spezifizieren, um $\int dr'$ zu lösen

sei $\boxed{V(r) = -\frac{\alpha}{r}}$ ($\alpha = \gamma m_1 m_2 > 0$ für Gravitationskraft;
$\alpha < 0$ möglich, für abstoßende Kraft, z.B. Coulomb)

$$\Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2} L \left(2\mu \left(E + \alpha/r' \right) - L^2/r'^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

neue Integrationsvariable: $u \equiv 1/r'$ $\Rightarrow du = -\frac{dr'}{r'^2}$

$$= -\int_{u_0}^{u} du \; L \left(2\mu \left(E + \alpha u \right) - L^2 u^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\int_{u_0}^{u} du \left(\frac{2\mu E}{L^2} + 2 \frac{\mu\alpha}{L^2} u - u^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Integral hat elementare Lsg; checke Bronstein / Mathematica / oder:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a + b^2 - (x-b)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a+b^2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-b}{\sqrt{a+b^2}} \right)^2}}$$

$\frac{x-b}{\sqrt{a+b^2}} \equiv y, \quad dy = \frac{dx}{\sqrt{\;}}$

$$= \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = c + \arcsin(y)$$

$$= c' - \arccos(y)$$

$$= \arccos \left(\frac{\frac{1}{r'} - \frac{\mu\alpha}{L^2}}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \left(\frac{\mu\alpha}{L^2} \right)^2}} \right) \Bigg|_{r'=r_0}^{r}$$

mit $\varphi = \varphi_0$ bei $r = r_0$ $\Rightarrow$ $\cos\varphi = \dfrac{\frac{1}{r} - \mu\alpha/L^2}{\frac{\mu\alpha}{L^2}\sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\mu\alpha^2}}}$

zur Vereinfachung: <u>Def</u> $e \equiv \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{\mu\alpha^2}}$ <u>Exzentrität</u>

$p \equiv \frac{L^2}{\mu\alpha}$

$\Rightarrow e \cos\varphi = \frac{p}{r} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{r(\varphi) = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}}$ Bahnkurve

<u>Bem.:</u>
- haben geometrische Form der Bahn $r(\varphi)$ erhalten;
  explizite Lsg $r(t), \varphi(t)$ kompliziert [Goldstein / Poole / Safko]
- $r(\varphi)$ sind Kegelschnitte:
  Kreis / Ellipse / Parabel / Hyperbel für $e=0$ / $0<e<1$ / $e=1$ / $e>1$
- haben geschlossene Bahnen erhalten;
  Spezialität des Grav-Pot. ((für andere $V(r)$ i.A. ))