1.4 Mehrteilchensysteme; Erhaltungsgrößen

→ hier: Systeme mit $N \geq 2$ Massenpunkten
(s. auch 'starrer Körper' in §3)
z.B. Atome eines Gases
durch Federn gekoppelte Massen
Planeten im Sonnensystem

→ je mehr Erhaltungsgrößen (vgl. §1.2, S.8) bekannt sind, desto genauer kennt man die System-Dynamik
(auch ohne explizite Lsg der Bewgl!)

- Impulserhaltung

$N=1$: $(\vec{p} = m\dot{\vec{r}})$, $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$

N Teilchen: Kraft auf i-tes T. $\vec{F}_i = \underbrace{\vec{F}_i^{ext}}_{\text{externe Kräfte (z.B. } m_i\vec{g})} + \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}}_{\text{innere Kräfte}}$ $\quad (\vec{F}_{ii} = \vec{0})$

$$\Rightarrow \dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{ext} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = \vec{0} \qquad (\text{Newton III}: \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji})$$

⇝ Gesamtimpuls $\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$ ist erhalten, falls keine externen Kräfte wirken.

bzw. mit Gesamtmasse $M \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i$, Schwerpkt $\vec{R} \equiv \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$

$$\Rightarrow M\ddot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{ext} \equiv \vec{F}^{ext} \qquad (m_i = \text{const.})$$

⇝ Schwerpunkt bewegt sich wie ein Teilchen mit Masse M, an dem alle externen Kräfte angreifen
(Schwerpunktsatz)

• Drehimpulserhaltung

$N=1$: $\quad \left(\vec L = \vec r \times \vec p = m\, \vec r \times \dot{\vec r} \right)$

$$\dot{\vec L} = m \underbrace{\dot{\vec r} \times \dot{\vec r}}_{=0} + m\, \vec r \times \ddot{\vec r} = \vec r \times \vec F \quad \text{Drehmoment}$$

N Teilchen: $\quad \vec L \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec r_i \times \vec p_i = \sum_i m_i\, \vec r_i \times \dot{\vec r}_i \quad$ Gesamtdrehimpuls

$$\Rightarrow \dot{\vec L} = \sum_{i=1}^{N} m_i\, \vec r_i \times \ddot{\vec r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec r_i \times \vec F_i \, , \qquad \vec F_i \overset{(s.o.)}{=} \vec F_i^{ext} + \sum_{j=1}^{N} \vec F_{ij}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec r_i \times \vec F_i^{ext}}_{\text{Drehmoment der externen Kräfte}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec r_i \times \vec F_{ij}}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec r_i \times \vec F_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \left(\vec r_i \times \vec F_{ij} + \vec r_j \times \vec F_{ji} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \left(\vec r_i - \vec r_j \right) \times \vec F_{ij}$$

$$= \vec 0$$

$\Leftarrow$ meistens; da $\vec F_{ij} \parallel (\vec r_i - \vec r_j)$

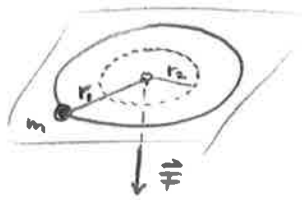
z.B. für Schwerkraft, Coulomb, ...

nicht für z.B. Reibung, ..

$\leadsto$ Gesamtdrehimpuls $\vec L \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec L_i$ ist erhalten, falls keine externen Kräfte wirken (und innere Kräfte $\parallel$ Verbindungsvektoren)

Bem.: • Drehimpuls (und Drehmoment) hängen von Wahl des Koord.-Ursprungs ab (da $\sim \vec r_i$); die Gln. oben gelten natürlich für alle Ursprünge bzw. Inertialsysteme.

Bsp.:



T. mit Masse m, rotiert mit v_1 auf Tischplatte, Radius r_1 (ideal, reibungsfrei)

(nach Ziehen am Faden:) Geschw. v_2 bei Radius r_2 ?

Lsg: Ursprung in Mitte $\Rightarrow \vec F_{Faden} \parallel$ Ortsvektor $\vec r$ $\Rightarrow$ kein Drehmoment

also $\dot{\vec L} = \vec 0$, $\quad L = |\vec L| = const = m r_1 v_1 = m r_2 v_2$

$$\Leftrightarrow \quad v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1$$

(($v_2 > v_1$. E-Gewinn?! ja: Ziehen am Faden verrichtet Arbeit))

Ortsvektor des N-ten T. im Inertialsyst.

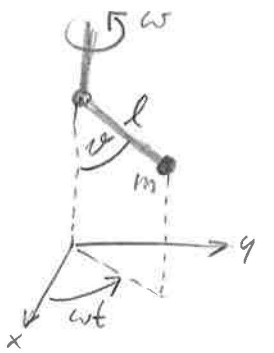
Def eine Funktion $f(\vec r_1, \vec r_2, \dots \vec r_N, \dot{\vec r}_1, \dot{\vec r}_2, \dots, \dot{\vec r}_N, t)$
heisst <u>Erhaltungsgröße</u> (bzw. '<u>Konstante der Bewegung</u>'),
wenn sie für alle Lsn $\vec r_i(t)$ der Bwgln konstant ist:

$$\frac{d}{dt} f(\vec r_1, \dots, \vec r_N, \dot{\vec r}_1, \dots, \dot{\vec r}_N, t) = 0$$

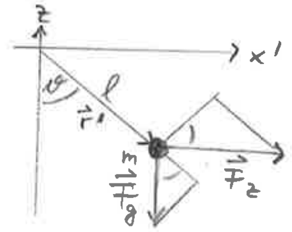
((Bsp: reibungsfreier schiefer Wurf $E(\vec r, \dot{\vec r}) = T + V = \frac{m}{2}\dot{\vec r}^2 + mgz$))

→ jede Erhaltungsgröße erleichtert das Lösen der Bwgln
(verringert Anzahl der nötigen Integrationen um eins)

<u>Bsp.</u>: Pendel (m, ℓ) auf angetriebener Achse (ω konstant)



(a) Bwgl. aufstellen:



im mitrotierenden System Σ',

$$\vec r\,' = \ell(\sin\vartheta, 0, -\cos\vartheta)$$

$$\Rightarrow \dot{\vec r}\,' = \ell\dot\vartheta(c,0,s)\ , \quad \ddot{\vec r} = \underbrace{\ell\ddot\vartheta}_{\text{Beschleunigung in tang. Richtung}}(c,0,s) - \ell\dot\vartheta^2(s,0,-c)$$

⇝ tangentiale Komp. der Gewichtskraft: $-mg\sin\vartheta$

⇝ Zentrifugalkraft $-m\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r\,') = m\ell\omega^2(\sin\vartheta, 0, 0)$, $\vec\omega = (0,0,\omega)$

((vgl. §1.3, S.10))

hat tang. Komp. $+m\ell\omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta$

$$\Rightarrow m\ell\ddot\vartheta = -mg\sin\vartheta + m\ell\omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta$$

(b) Erhaltungsgröße (oft angewandter Trick: Bwgl $*$ (Funktion)$^\cdot$):

Bwgl. $*\ \ell\dot\vartheta$: $m\ell^2\dot\vartheta\ddot\vartheta = -mg\ell\dot\vartheta\sin\vartheta + m\ell^2\omega^2\dot\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{m}{2}(\ell\dot\vartheta)^2 - \frac{m}{2}(\ell\omega\sin\vartheta)^2 - mg\ell\cos\vartheta}_{\equiv f(\vartheta,\dot\vartheta) = \text{Erhaltungsgröße} = \text{const} \equiv C}\Big) = 0$$

(c) Bwgl. lösen durch <u>eine</u> Integration:

$$\dot\vartheta = \frac{d\vartheta}{dt} = \pm\frac{1}{\ell}\sqrt{\frac{2c}{m} + (\ell\omega\sin\vartheta)^2 + 2g\ell\cos\vartheta}$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \pm\ell\int_{\vartheta_0}^{\vartheta(t)} d\vartheta'\left(\frac{2c}{m} + (\ell\omega\sin\vartheta')^2 + 2g\ell\cos\vartheta'\right)^{-1/2}$$

((hier Stammfkt nicht als elementare Fkt darstellbar))