<u>Bsp</u> (von Lorentzkraft verrichtete Arbeit)

bewegte Ladung $(q, \vec{v})$ im Magnetfeld $\vec{B}$

→ es wirkt die <u>Lorentzkraft</u> $\vec{F} = q\, \vec{v} \times \vec{B}$

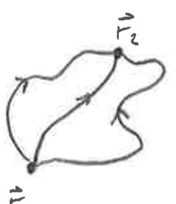
$$\Rightarrow \text{Arbeit } W = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{v}(t) \cdot \underbrace{\left(q\, \vec{v}(t) \times \vec{B}(\vec{r}(t))\right)}_{\perp \vec{v}}}_{=0} = 0$$

((CERN: Geschw. geladener T. lassen sich nur mit $\vec{E}$-, nicht mit $\vec{B}$-Feldern erhöhen! $\vec{B}$ ändert Richtung, aber nicht Betrag der Geschw.))

<u>Def</u> ein zeitunabh. Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ heisst <u>konservativ</u>, wenn es ein <u>Potential</u> $V(\vec{r})$ gibt, mit $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$

<u>Bem</u>

- $V(\vec{r})$ heisst auch <u>potentielle Energie</u> (s.a.)
- für konservative Kräfte ist die Arbeit wegunabhängig:



$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{r}) = -\left[V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1)\right]$$

- $V(\vec{r})$ ist bis auf eine additive Konstante eindeutig.

<u>Beh.</u> es gilt $\vec{F}$ konservativ $\Leftrightarrow$ $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$

(für einfach zusammenhängende Gebiete, d.h. solche in denen sich jede geschlossene Kurve auf einen Punkt zusammenziehen lässt.

)

<u>Beweis:</u> "$\Rightarrow$": $\vec{F} = -\vec{\nabla} V \Rightarrow -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V) = 0$

$$\left(\left(\text{denn } \left(\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V)\right)^i = \sum_{jk} \underbrace{\varepsilon^{ijk}}_{\substack{\text{antisy.} \\ j \leftrightarrow k}} \underbrace{\partial_{x_j} \partial_{x_k}}_{\substack{\text{symm} \\ j \leftrightarrow k}} V = 0 \right)\right)$$

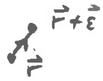
"$\Leftarrow$": sei $\vec{r}_0$ beliebig, <u>def</u> $V(\vec{r}) \equiv -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{s} \cdot \vec{F}(\vec{s})$

diese Def. ist wegunabhängig, denn:

$$\int_{C_1} d\vec{s} \cdot \vec{F} - \int_{C_2} d\vec{s} \cdot \vec{F} = \oint_C d\vec{s} \cdot \vec{F} = \int_A d\vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

Stokes (s. <u>Ü2</u>)
(da einfach zus. hgd.)

$\rightsquigarrow$ also $\int_{C_1} d\vec{s} \cdot \vec{F} = \int_{C_2} d\vec{s} \cdot \vec{F}$

wähle nun $C_1 =$  , $C_2 =$ 

dann (C_1) $\int_{\vec{r}}^{\vec{r}+\vec{\varepsilon}} d\vec{s} \cdot \vec{F} = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{F}(\vec{r}) + O(\vec{\varepsilon}^2)$

(C_2) $-\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{s} \cdot \vec{F} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}+\vec{\varepsilon}} d\vec{s} \cdot \vec{F} \underset{\text{nach def}}{=} V(\vec{r}) - V(\vec{r}+\vec{\varepsilon}) = -\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\nabla} V + O(\vec{\varepsilon}^2)$

dies gilt für beliebige $\vec{\varepsilon}$ $\Rightarrow$ $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ ~~qed~~

<u>Bsp</u> (Arbeit von konservativen Kräften) s. <u>Ü5</u>, <u>Ü6</u>

- Gravitationskraft, Coulombkraft, Federkraft : konservativ
- Reibungskraft <u>nicht</u> konservativ: Reibungsarbeit hängt von Länge des Wegs ab (s.a. S.5, S.6)

<u>Def</u> <u>kinetische Energie</u> $T \equiv \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2$ $(m = \text{const})$

damit ist $\int_1^2 d\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \dot{\vec{r}}(t) \cdot \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\text{(Newton)}} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \partial_t T = T(t_2) - T(t_1)$

andererseits, für konservative Kräfte $= -\int_1^2 d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} V = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$

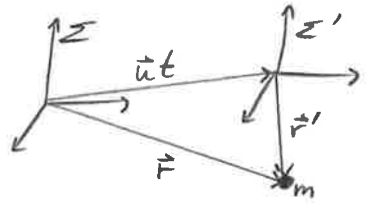
$\Rightarrow$ $T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \equiv E$ <u>Energieerhaltungssatz</u>

für konservative Kräfte ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant!

1.3 Beschleunigte Bezugssysteme / Scheinkräfte

Newton ($\vec{F} = \dot{\vec{p}}$) gilt in (allen) Inertialsystemen, vgl. S.4;
ist invariant unter Galileitransformationen ("Boost")

Σ, Σ' bewegen sich mit konstanter Geschw. $\vec{u}$ relativ zueinander,

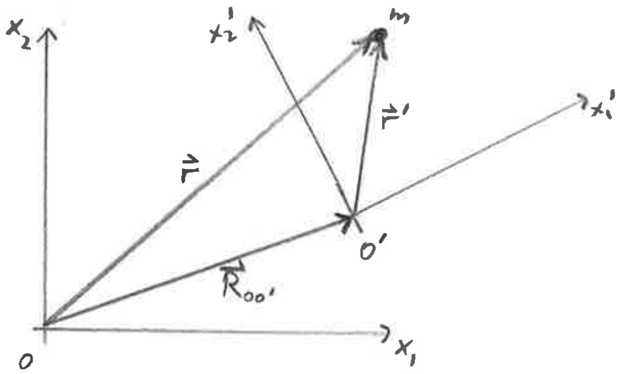


wähle $\Sigma = \Sigma'$ bei $t = 0$

Koordinaten des Massenpunktes m:
$\vec{r}(t) = \vec{u}\,t + \vec{r}'(t)$

$\Rightarrow \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{\vec{r}}'(t)$, Newton invariant qed

$\rightarrow$ betrachte nun Koord.-Trafo, die keine Galileitrafo ist.
Σ sei Inertialsystem, Σ' sei beschleunigtes Bezugssystem



- Translationen: Bewegung des Ursprungs O', $\vec{R}_{00'}$
- Rotationen: System Σ' rotiert um seinen Ursprung O', mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$

$\longrightarrow$ wie lautet die Bwgl. in Σ', also für $\vec{r}'$?

laut Abb.: $\vec{r}(t) = \vec{R}_{00'}(t) + \vec{r}'(t)$ in Vektor-Form

bzw. $\sum_{i=1}^{3} x_i(t)\,\vec{e}_i = \vec{R}_{00'}(t) + \sum_{i=1}^{3} x_i'(t)\,\vec{e}_i'(t)$ in Komponenten

$\partial_t \Rightarrow \dot{x}_i\,\vec{e}_i = \dot{\vec{R}}_{00'} + \dot{x}_i'\,\vec{e}_i' + x_i'\,\dot{\vec{e}}_i'$ (hier mit Einstein'scher Summenkonvention)

z.B. Σ' rotiert um x_3-Achse, $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$

dann ist $\vec{e}_1'(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \dot{\vec{e}}_1(t) = \begin{pmatrix} -\omega \sin(\omega t) \\ \omega \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{\omega} \times \vec{e}_1'(t)$

allg. gilt $\dot{\vec{e}}_i' = \vec{\omega} \times \vec{e}_i'$

also $\dot{x}_i \vec{e}_i = \dot{\vec{R}}_{00'} + \dot{x}_i' \vec{e}_i' + \vec{\omega} \times x_i' \vec{e}_i'$

bzw $\underbrace{\dot{\vec{r}}}_{\vec{v} \text{ in } \Sigma} = \underbrace{\dot{\vec{R}}_{00'}}_{\text{Relativgeschw. der Ursprünge}} + \underbrace{\dot{\vec{r}}'}_{\vec{v}' \text{ in } \Sigma'} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}'}_{\text{in } \Sigma \text{ gemessene Geschw. eines starr mit } \Sigma' \text{ verbundenen Punktes}}$

$\partial_t \Rightarrow \ddot{x}_i \vec{e}_i = \ddot{\vec{R}}_{00'} + \ddot{x}_i' \vec{e}_i' + \underbrace{\dot{x}_i' \dot{\vec{e}}_i' + \vec{\omega} \times \dot{x}_i' \vec{e}_i'}_{\stackrel{!}{=} 2 \vec{\omega} \times \dot{x}_i' \vec{e}_i'} + \vec{\omega} \times x_i' \dot{\vec{e}}_i' + \dot{\vec{\omega}} \times x_i' \vec{e}_i'$

bzw. $\underbrace{\ddot{\vec{r}}}_{\stackrel{!}{=} \vec{F}/m} = \ddot{\vec{R}}_{00'} + \ddot{\vec{r}}' + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$ (nach Newton im Inertialsystem Σ)

$\Leftrightarrow$ $$\boxed{m \ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - \underset{①}{m \ddot{\vec{R}}_{00'}} - \underset{②}{m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')} - \underset{③}{2m \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'} - \underset{④}{m \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'}}$$

Bewegungsgleichung im beschleunigten $(\vec{R}_{00'}, \vec{\omega})$ Bezugssystem

Bem.:
- Bewgl. in Σ' hat Form wie in Σ,
  aber haben $\vec{F}$ + "Scheinkräfte" als Ursache auf RHS
- $m\ddot{\vec{r}}' \neq 0$, auch wenn $\vec{F} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ Σ' kein Inertialsystem
- ① von Beschleunigung des Ursprungs
  → z.B. spürbar bei Flugzeugstart etc.
- ② heisst Zentrifugalkraft (auch: Fliehkraft); ist $\perp \vec{\omega}$
  → Kurvenfahrt, Kraft nach außen
- Ü8 → ③ heisst Corioliskraft; geschwindigkeitsabhängig; $\perp \vec{\omega}, \vec{v}'$
  → wichtig für Meteorologie, Artillerie, Flussdynamik, ...
  └ Passatwinde, Wirbelstürme
- ④ von nichtgleichförmiger Rotation
  eher unwichtig, da meist $\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$