1. Newtonsche Mechanik

hier: als kurze Einführung / Übersicht
(bekannt aus "Einführung in die Physik I")

1.1 Grundbegriffe, Newtonsche Axiome

einige Begriffe / Notation:

Raum: 3-dimensional, statisch, euklidisch
es gibt kartesische Koordinatensysteme

Ortsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{r} \in \mathbb{R}^3$

als Pfeil Ursprung → Physik
⤳ hat Ausgangspunkt $(\vec{0})$, Richtung $(\vec{e}_r)$, Betrag $(r = |\vec{r}|)$

Zeit: 1-dimensional, universal (überall synchronisiert)

Massenpunkt: keine Struktur; Masse m

Bahnkurve: $\vec{x}(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

Geschwindigkeit: $\vec{v} = \dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \partial_t \vec{x}$; Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$

Beschleunigung: $\vec{a} = \ddot{\vec{x}} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$

Kraft: $\vec{F} \in \mathbb{R}^3$, ist additiv: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots$

Newtonsche Axiome

I Es gibt Inertialsysteme, d.h. Koord.-Systeme in denen ein Massenpunkt, an dem keine Kraft angreift, ruht oder sich gleichförmig bewegt, also $\ddot{\vec{x}} = \vec{0}$.

II In Inertialsystemen gilt $\vec{F} = \dot{\vec{p}} \overset{m=\text{const.}}{=} m\ddot{\vec{x}}$

III Die von zwei Massenpunkten aufeinander ausgeübten Kräfte sind entgegengesetzt gleich: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Bemerkungen

- I ist Spezialfall von II
- II heisst Bewegungsgleichung
- wir betrachten (wenn nicht ausdrücklich anders gesagt) nur konstante Massen. Dann ist

  II: $\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{x}}) = \dot{m}\dot{\vec{x}} + m\ddot{\vec{x}} = m\ddot{\vec{x}}$
- II definiert die "träge Masse" m des Massenpunktes. Mit Hilfe von III kann man diese (als Vielfaches einer international festgelegten, normierten Masseneinheit) messen:

  System von 2 Massen, $m_1\ddot{\vec{x}}_1 = \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -m_2\ddot{\vec{x}}_2$

  $\Rightarrow m_1/m_2 = |\ddot{\vec{x}}_2| / |\ddot{\vec{x}}_1|$
- In II wird vorausgesetzt, dass $\vec{F}$ höchstens von $\vec{x}, \dot{\vec{x}}$ abhängt
- II ist ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung (da nur $\ddot{\vec{x}}$ und nicht $\dddot{\vec{x}}$ etc. vorkommt)

  $\Rightarrow$ mit gegebenen Anfangsbedingungen $\vec{x}(0), \dot{\vec{x}}(0)$ und Kraft $\vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}})$ gibt es eine eindeutige Lösung.

<u>Bsp</u> (Wurf mit Luftreibung)

wir betrachten einen Massenpunkt im homogenen Schwerefeld mit Luftreibung:

$$\vec{F} = \underbrace{\vec{F}_S}_{= m_s \vec{g}} + \underbrace{\vec{F}_R}_{= -\alpha \vec{v}}$$

$-\alpha\vec{v}$, α = konstant ; "Stokessche Reibung"

$m_s \vec{g}$, m_s = "schwere Masse" ;

expt.: $m_s \sim m$ (da alle Körper gleich fallen)

$\rightarrow$ wähle $m_s = m$

dann (auf der Erdoberfl.) $|\vec{g}| \approx 9{,}8 \, m/s^2$

Bewegungsgl.: $m\vec{g} - \alpha \dot{\vec{x}} = m \ddot{\vec{x}}$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{\vec{v}} + \frac{\alpha}{m}\vec{v} = \vec{g}$$

lin inh Dgl 1. O.

Lösung:

(1) allg. Lsg der hom. Dgl. ($\vec{v}_h$)

$$\frac{d\vec{v}_h}{dt} = -\frac{\alpha}{m}\vec{v}_h \quad , \quad \text{Ansatz } \vec{v}_h = v_h \cdot \vec{e}$$

$$\frac{dv_h}{v_h} = -\frac{\alpha}{m}\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln v_h = -\frac{\alpha}{m}(t - t_0) \quad \Leftrightarrow \quad v_h = c\, e^{-\frac{\alpha}{m}t}$$

(2) spez. Lsg der inhom. Dgl. ($\vec{v}_s$)

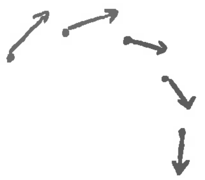
$$\dot{\vec{v}}_s + \frac{\alpha}{m}\vec{v}_s = \vec{g} \quad , \quad \text{versuche } \dot{\vec{v}}_s = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_s = \frac{m}{\alpha}\vec{g} \quad ✓$$

(3) allg Lsg der inhom Dgl

$$\vec{v} = \vec{v}_h + \vec{v}_s = c\,\vec{e}\, e^{-\frac{\alpha}{m}t} + \frac{m}{\alpha}\vec{g}$$

(4) Konstanten durch Anfangsbedingung festlegen (bei $t=0$)

$$\vec{v}(0) = c\,\vec{e} + \frac{m}{\alpha}\vec{g} \quad \Leftrightarrow \quad c\,\vec{e} = \vec{v}(0) - \frac{m}{\alpha}\vec{g}$$



$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \underbrace{\vec{v}(0)\, e^{-\frac{\alpha}{m}t}}_{\text{Anfangsgeschw. verschwindet wg Reibung}} + \underbrace{\frac{m}{\alpha}\vec{g}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right)}_{\text{Endzustand unabh. v. Anfangsbed.}}$$

(5) Bahnkurve: $\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \int_0^t dt' \, \vec{v}(t') = \dots$

1.2 Arbeit, konservative Kraft, Potential

Im Allg., $\vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)$

(falls $\vec{F}$ nicht von $\dot{\vec{r}}$ abhängt, nennt man $\vec{F}(\vec{r}(t), t)$ Kraftfeld)

def Arbeit $dW = \vec{F} \cdot \underbrace{d\vec{r}}_{\text{infinit. Wegelement}}$

- Summation entlang einer Kurve C → Kurvenintegrale
- Parametrisierung von C: oft Zeit t als Par.

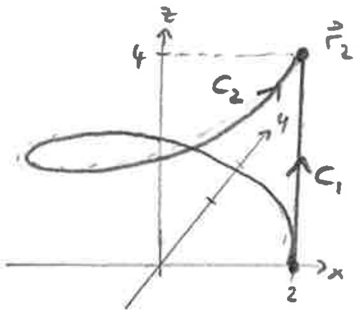
  beschreibe C durch $\vec{r}(t)$ für $t \in [t_1, t_2]$ $\Rightarrow$ $d\vec{r} = \vec{v}\, dt$

  → Kurvenintegral ist gewöhnliches Integral, und Arbeit

  $W = \int_{t_1}^{t_2} dt\; \vec{v} \cdot \vec{F}$

Bsp (auf zwei verschiedenen Wegen von $\vec{F}$ geleistete Arbeit)

sei $\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ x^2/2m \\ x+z \end{pmatrix} \frac{N}{m}$



bewege Massenpunkt von

$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 2m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 2m \\ 0 \\ 4m \end{pmatrix}$

(C_1) auf Gerade $\parallel$ z-Achse

$$d\vec{r} = \vec{e}_z\, dz \Rightarrow W_1 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_0^{4m} dz\; \vec{e}_z \cdot \vec{F} = \int_0^{4m} dz\, (2m + z) \frac{N}{m} = 16\, Nm$$

(C_2) auf Schraubenlinie um z-Achse

$$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2m \cdot \cos\varphi \\ 2m \cdot \sin\varphi \\ 4m \cdot \varphi/2\pi \end{pmatrix}$$ mit $\varphi \in [0, 2\pi]$ ist Par-Darst. v. C_2

$$\Rightarrow W_2 = \int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \cdot \vec{F} = \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} -2m \sin\varphi \\ 2m \cos\varphi \\ 2m/\pi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2m \sin\varphi \\ 2m \cos^2\varphi \\ 2m \cos\varphi + 2m\, \varphi/\pi \end{pmatrix} \frac{N}{m}$$

$$= \left[-4\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right) + 4\left(\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right) + \frac{2}{\pi}\left(2\sin\varphi + \frac{\varphi^2}{\pi}\right)\right]_{\varphi=0}^{2\pi} Nm$$

$$= (8 - 4\pi)\, Nm$$

(($\Rightarrow W_1 \neq W_2$, $\vec{F}$ war "nicht konservativ", s.u.))