Theoretische Physik I — Nachklausur – Lösung — 17.04.2014

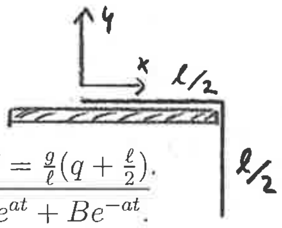
Aufgabe 1: Newton mit Reibung (4+1+1=6 Punkte)

(a) Newton: $m\dot v = -\gamma m/v^2 \Leftrightarrow -\gamma = \dot v\, v^2 = \partial_t(v^3/3)$, $\Rightarrow v^3 = -3\gamma t + v_0^3$ bzw $v(t) = [v_0^3 - 3\gamma t]^{1/3}$. Aus $v(t_1) = 0$ folgt dann $\underline{t_1 = v_0^3/(3\gamma)}$.

(b) $\underline{\dot T =} \partial_t(\frac{m}{2} v^2) = m\, v\, \dot v = -\gamma\, m/v \underline{= -\gamma\, m[v_0^3 - 3\gamma t]^{-1/3}}$

(c) $\underline{J =} \int_0^{t_1} \mathrm{d}t\, \gamma\, m\, (v_0^3 - 3\gamma t)^{-1/3} = -\frac{m}{2}(v_0^3 - 3\gamma t)^{2/3}|_{t=0}^{t_1} \underline{= \frac{m}{2}\, v_0^2}$

Aufgabe 2: Lagrange-Formalismus (3+1+2=6 Punkte)

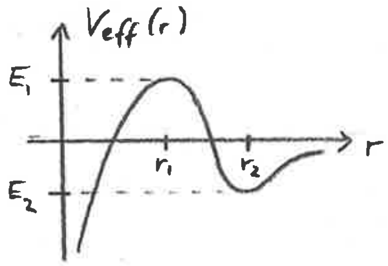


(a) Sei q die x-Koordinate des hinteren Seilendes. $L = T - V$ mit $T = \frac{m}{2}v^2 = \frac{\mu\ell}{2}\dot q^2$ und $V = \int \mathrm{d}m\, g\, y = \int_{-q-\ell/2}^{0} \mathrm{d}y\, \mu g\, y = -\frac{\mu g}{2}(q + \frac{\ell}{2})^2$, also $\underline{L = \frac{\mu\ell}{2}\dot q^2 + \frac{\mu g}{2}(q + \frac{\ell}{2})^2}$.

(b) $\partial_{\dot q} L = \mu\ell\dot q$, $\partial_t\partial_{\dot q} L = \mu\ell\ddot q$; $\partial_q L = \mu g(q + \frac{\ell}{2})$; also lautet die Euler-Lagrange-Glg $\underline{\ddot q = \frac{g}{\ell}(q + \frac{\ell}{2})}$.

(c) Mit $Q \equiv q + \frac{\ell}{2}$ und $a^2 \equiv \frac{g}{\ell}$ lautet die E-L-Glg $\ddot Q - a^2 Q = 0$, mit Lösung $Q = Ae^{at} + Be^{-at}$. Konstanten aus AB bestimmen: $\dot Q(0) = a(A - B) = 0 \Rightarrow B = A$; $Q(0) = A + B = 2A = \frac{\ell}{2} \Rightarrow A = \frac{\ell}{4}$. Insgesamt also $\underline{q(t) = -\frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2}\cosh(\sqrt{g/\ell}\, t)}$ für $0 < Q < \frac{\ell}{2}$ (bzw für $0 < t < \sqrt{\ell/g}\, \mathrm{acosh}(2)$).

Aufgabe 3: Relativistisches Kepler-Problem (4+2=6 Punkte)



(a) Setze $g \equiv G\, m_1 m_2$. Dann ist $V_{\text{eff}}(r) = -\frac{g}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{gL^2}{c^2\mu^2 r^3}$. Extrema bestimmen: $V_{\text{eff}}(r^{\text{NS}}) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow r_{1/2}^{\text{NS}} = \frac{L^2}{4\mu g} \pm \sqrt{\frac{L^4}{16\mu^2 g^2} - \frac{L^2}{c^2\mu^2}}$, Wurzel-Inhalt $= \frac{L^2}{c^2\mu^2}(\frac{L^2c^2}{16g^2} - 1) > 0$ laut Aufgabenstellung, also <u>2 Nullstellen</u>; $V'_{\text{eff}}(r) = \frac{g}{r^2} - \frac{L^2}{\mu r^3} + \frac{3gL^2}{c^2\mu^2 r^4} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow r^2 - \frac{L^2}{\mu g} r + \frac{3L^2}{c^2\mu^2} = 0 \Rightarrow r_{1/2} = \frac{L^2}{2\mu g} \pm \sqrt{\frac{L^4}{4\mu^2 g^2} - \frac{3L^2}{c^2\mu^2}}$, Wurzel-Inhalt $= \frac{3L^2}{c^2\mu^2}(\frac{L^2c^2}{12g^2} - 1) > 0$, also <u>2 Extrema</u>.

(b) Instabile Kreisbahn bei r_1, E_1; stabile Kreisbahn bei r_2, E_2; stabile Bahnen für $r > r_1, E < E_1$; Rest: entweder Zusammenstoss oder $r \to \infty$.

Aufgabe 4: Maxwellgleichungen per Ansatz (6 Punkte)

[Max 1: $\vec\nabla \cdot \vec E = 0$] $\partial_x \cos(\omega t - kz) = 0$, OK. [Max 3: $\vec\nabla \cdot \vec B = 0$] $\partial_y \cos(\omega t - qz) = 0$, OK. [Max 4: $\vec\nabla \times \vec B = \dot{\vec E}/c$] $\vec\nabla \times \vec B = -\vec e_x \partial_z \beta \cos(\omega t - qz) = -\vec e_x \beta q \sin(\omega t - qz)$ und $\dot{\vec E}/c = -\frac{\omega}{c}\vec e_x \alpha \sin(\omega t - kz)$, also $\underline{k = q}$ und $\frac{\omega}{c}\alpha \stackrel{(a)}{=} \beta k$. [Max 2: $\vec\nabla \times \vec E = -\dot{\vec B}/c$] $\vec\nabla \times \vec E = \vec e_y \partial_z \alpha \cos(\omega t - kz) = \vec e_y \alpha k \sin(\omega t - kz)$ und $-\dot{\vec B}/c = \frac{\omega}{c}\vec e_y \beta \sin(\omega t - qz)$, also $k = q$ und $\frac{\omega}{c}\beta \stackrel{(b)}{=} \alpha k$. Aus $\frac{(a)}{(b)} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \underline{\alpha = \pm\beta}$; aus $(a)^2 \Rightarrow \underline{\omega = \pm ck}$.

Aufgabe 5: Rotierende geladene Hohlkugel (2+2+3=7 Punkte)

(a) In Kugelkoord (r, θ, φ) ist $\underline{\rho(\vec r) = \sigma\, \delta(r - R)} \Rightarrow \underline{\vec j(\vec r) =} \rho(\vec r)\, \vec v(\vec r) = \rho(\vec r)\omega r \sin(\theta)\vec e_\varphi = \underline{\sigma R\omega\delta(r - R)\sin(\theta)\vec e_\varphi}$

(b) $\underline{\vec m =} \frac{1}{2c}\int \mathrm{d}^3r\, \vec r \times \vec j = \frac{\sigma R\omega}{2c}\int \mathrm{d}^3r\, R\delta(r - R)\sin(\theta)\underbrace{\vec e_r \times \vec e_\varphi}_{=-\vec e_\theta} = \frac{\sigma R^4\omega\pi}{c}\underbrace{\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \sin^3(\theta)}_{=[\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta]_0^\pi}\, \vec e_z = \frac{4\pi\omega\sigma R^4}{3c}\vec e_z = \underline{\frac{\omega Q R^2}{3c}\vec e_z}.$

(c) $\underline{\vec A(\vec r)\Big|_{\text{Dipol}}} = \frac{\vec m \times \vec r}{r^3} = \frac{\omega Q R^2}{3c}\frac{1}{r^2}\vec e_z \times \vec e_r = \underline{\frac{\omega Q R^2}{3c}\frac{1}{r^2}\sin(\theta)\vec e_\varphi} \Rightarrow \vec B(\vec r) = \vec\nabla \times \vec A = \vec\nabla \times (\vec m \times \frac{\vec r}{r^3})$,

$\underline{\vec B(\vec r)} \stackrel{\text{bac}-\text{cab}}{=} \vec m(\vec\nabla \cdot \frac{\vec r}{r^3}) - (\vec m \cdot \vec\nabla)\frac{\vec r}{r^3} = \vec m(\frac{3}{r^3} - 3\frac{r^2}{r^5}) - |\vec m|\partial_z \frac{\vec r}{r^3} = -|\vec m|\frac{\vec e_z}{r^3} + 3|\vec m|\frac{z\,\vec e_r}{r^4} = \underline{\frac{\omega Q R^2}{c r^3}(\frac{z}{r}\vec e_r - \frac{1}{3}\vec e_z)}.$

Aufgabe 6: Eichinvarianz des Feldstärketensors (4 Punkte)

$\phi' = \phi - \frac{1}{c}\dot\chi \Rightarrow A'^0 = A^0 - \partial^0\chi$ und $\vec A' = \vec A + \vec\nabla\chi \Rightarrow A'^i = A^i - \partial^i\chi$. Zusammen also $A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu\chi$. Damit ist $\underline{F'^{\mu\nu}} = \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu = \partial^\mu A^\nu - \partial^\mu\partial^\nu\chi - \partial^\nu A^\mu + \partial^\nu\partial^\mu\chi = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \underline{= F^{\mu\nu}}$.