Theoretische Physik I	**Nachklausur**	17.04.2014

[2 Stunden Bearbeitungszeit, Name auf jedes Blatt, kein Skript, keine anderen Hilfsmittel.]

Aufgabe 1: Newton mit Reibung (4+1+1=6 Punkte)

Ein Teilchen mit Masse m und Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = v_0$ erfährt die Reibungskraft $-\gamma\, m/v^2$.

(a) Zu welchem Zeitpunkt t_1 kommt es zur Ruhe? [Hinweis: erst Bewegungsgleichung für $v(t)$ aufstellen und lösen]

(b) Wieviel kinetische Energie verliert das Teilchen pro Zeit: $\dot{T}(t) = ?$

(c) Verifizieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie $J = \int_0^{t_1} \mathrm{d}t\, [-\dot{T}(t)]$ berechnen [es sollte die Start-Energie herauskommen].

Aufgabe 2: Lagrange-Formalismus (3+1+2=6 Punkte)

Ein homogenes Seil (unendlich dünn, Massendichte μ, Länge ℓ) liege zur Hälfte auf einem Tisch, die andere Hälfte hängt über die Tischkante senkrecht nach unten. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das Seil losgelassen und rutscht reibungsfrei herunter.

(a) Wie lautet die Lagrange-Funktion L des Systems?

(b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf [Hinweis: die Euler-Lagrange-Gleichung lautet $\partial_t \partial_{\dot{q}} L = \partial_q L$].

(c) Bestimmen Sie die Lösung der Bewegungsgleichung, die den obigen Anfangsbedingungen genügt (nur bis zum Zeitpunkt des vollständigen Abrutschens vom Tisch).

Aufgabe 3: Relativistisches Kepler-Problem (4+2=6 Punkte)

Relativistische Korrekturen führen zu einem zusätzlichen Term im Gravitationspotential, das jetzt die Form $V(r) = -\frac{G\, m_1 m_2}{r}\,(1 + \frac{L^2}{c^2\, \mu^2\, r^2})$ annimmt. Dabei sind m_1 und m_2 die Massen des Zweikörperproblems, $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ die reduzierte Masse, G die Gravitationskonstante und $L = \mu r^2 \dot{\varphi}$ der Drehimpuls.

(a) Skizzieren Sie das effektive Potential $V_{\mathrm{eff}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\,\mu\, r^2}$ dieses Systems für den Fall $\frac{L^2 c^2}{m_1^2 m_2^2 G^2} > 16$.

(b) Diskutieren Sie anhand Ihrer Skizze qualitativ die möglichen Bahnkurven.

Aufgabe 4: Maxwellgleichungen per Ansatz (6 Punkte)

Betrachten Sie den Ansatz $\vec{E}(\vec{r}, t) = \alpha\, \vec{e}_x \cos(\omega t - kz)$, $\vec{B}(\vec{r}, t) = \beta\, \vec{e}_y \cos(\omega t - qz)$, wobei ω eine gegebene Konstante ist. Welche Bedingungen müssen die vier Konstanten k, q, α, β erfüllen, so dass $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Lösungen der Maxwell-Gleichungen im Vakuum ($\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$) sind?

Aufgabe 5: Rotierende geladene Hohlkugel (2+2+3=7 Punkte)

Eine Kugel (Radius R, Mittelpunkt im Ursprung) trage die homogen auf der Oberfläche verteilte Flächenladungsdichte $\sigma = Q/(4\pi R^2)$ und rotiere mit Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse.

(a) Wie lautet die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ und die durch die Rotation erzeugte Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$?

(b) Bestimmen Sie das erzeugte magnetische Moment $\vec{m} = \frac{1}{2c} \int \mathrm{d}^3 r\, \vec{r} \times \vec{j}$. [Resultat: $\vec{m} \sim \vec{e}_z$]

(c) Berechnen Sie Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}) = (\vec{m} \times \vec{r})/r^3$ und magnetische Flussdichte $\vec{B}(\vec{r})$ in Dipolnäherung.

Aufgabe 6: Eichinvarianz des Feldstärketensors (4 Punkte)

Ein 4-Vektorpotential sei als $A \equiv \binom{\phi}{\vec{A}}$ definiert, wobei $\vec{A}$ das normale Vektorpotential ist. Unter einer Eichtransformation ändern sich ϕ und $\vec{A}$ als $\phi' = \phi - \frac{1}{c}\, \dot{\chi}$ und $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$, wobei χ eine beliebige reelle Funktion ist. Zeigen Sie, dass der Feldstärketensor $F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ eichinvariant ist. [Hinweis: $\partial^\mu = \binom{\partial^0}{-\vec{\nabla}}$ mit $\partial^0 = \frac{1}{c}\, \partial_t$]

Viel Erfolg!