Theoretische Physik I	**Klausur – Lösung**	21.02.2014

Aufgabe 1: Atwoodsche Fallmaschine (2+4=6 Punkte)

(a) Wegen $2m = \rho \int \mathrm{d}V$ ist innerhalb der Rolle (Länge L) die Massendichte $\rho = 2m/(\pi R^2 L)$.
In Zylinderkoord (r, φ, z) ergibt sich $\underline{I =} \rho \int \mathrm{d}V\, \vec{r}_\perp^{\,2} = \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^L \mathrm{d}z \int_0^R \mathrm{d}r\, r\, r^2 = \rho\, 2\pi\, L\, R^4/4 = \underline{mR^2}$
(b) $L = T - V$ mit $T = \frac{1}{2} m(R\dot\varphi)^2 + \frac{1}{2}(3m)(R\dot\varphi)^2 + \frac{1}{2} I\, \dot\varphi^2$ und $V = mg(R\varphi) + (3m)g(-R\varphi)$.
$\Rightarrow \underline{L = \frac{5}{2} mR^2\dot\varphi^2 + 2mgR\varphi} \Rightarrow \partial_t\, \partial_{\dot\varphi} L = 5mR^2\ddot\varphi = \partial_\varphi L = 2mgR \Leftrightarrow \underline{R\ddot\varphi = \frac{2}{5}\, g}$.
$\Rightarrow$ Die Masse m wird mit $\underline{\frac{2}{5}\, g \text{ nach oben}}$ beschleunigt.

Aufgabe 2: Newton mit Reibung und Lorentzkraft (6 Punkte)

Bilde zunächst $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (-s, c, 0)\, \dot f\, R$
$\Rightarrow \dot{\vec{v}} = (-c, -s, 0)\, \dot f^2\, R + (-s, c, 0)\, \ddot f\, R \overset{\text{Newton}}{=} -\gamma\vec{v} + \frac{q}{mc}\, \vec{v} \times (0, 0, B(t)) = -\gamma(-s, c, 0)\dot f R + \frac{q}{mc}\, \dot f R B(t)(c, s, 0)$
$\Leftrightarrow 0 = (c, s, 0)\{-\dot f^2 R - \frac{q}{mc}\, \dot f R B\} + (-s, c, 0)[\ddot f R + \gamma \dot f R]$, löse durch Koeff-Vergleich
Aus $[...] = 0$ folgt $\ddot f = -\gamma \dot f \Rightarrow \dot f = A\, e^{-\gamma t} \Rightarrow \underline{f(t) =} C - \frac{A}{\gamma}\, e^{-\gamma t} \overset{f(0)=0}{=} \underline{\frac{A}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t})}$
Konstante A aus Anfangsbedingung bestimmen: $\vec{v}(0) = (0, 1, 0)\dot f(0) R \overset{!}{=} (0, v_0, 0) \Rightarrow \dot f(0) = \underline{\frac{v_0}{R} = A}$
Aus $\{...\} = 0$ folgt $\underline{B(t) =} - \frac{mc}{q}\, \dot f = \underline{-\frac{mc}{q}\, \frac{v_0}{R}\, e^{-\gamma t}}$.

Aufgabe 3: Viererimpuls-Erhaltung (4 Punkte)

$$\begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}_{\text{vorher}} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}_{\text{nachher}} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5mc \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{m^2c^2 + \vec{p}_1^{\,2}} \\ \vec{p}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{} \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{} \\ \vec{p}_3 \end{pmatrix}.$$

0-Komponente: $5mc = 3\sqrt{} \Leftrightarrow (\frac{25}{9} - 1)m^2c^2 = \vec{p}^{\,2} \Rightarrow \underline{|\vec{p}| = \frac{4}{3}\, mc}$
i-Komponenten: $\vec{0} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$: Mercedes-Stern.

Aufgabe 4: Elektrostatik: parallele Kreisringe (6 Punkte)

In Zylinderkoord (r, φ, z) ist $\underline{\rho(\vec{r}) = \frac{q}{2\pi R}\, \delta(r - R)[\delta(z - b) - \delta(z + b)]}$.
$\phi(\vec{r}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, \rho(\vec{r}') \approx \frac{1}{|\vec{r}|} \int \mathrm{d}^3 r'\, \rho(\vec{r}') + \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \int \mathrm{d}^3 r'\, \vec{r}'\, \rho(\vec{r}') + \mathcal{O}(1/|\vec{r}|^3) = 0 + \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cdot \vec{p} + \mathcal{O}(1/|\vec{r}|^3)$

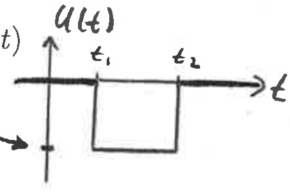
$$\vec{p} = \frac{q}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \int_0^\infty \mathrm{d}r\, r \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \delta(r - R)[\delta(z - b) - \delta(z + b)] = \frac{q}{2\pi R} \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 2\pi R(b + b) \end{pmatrix} = 2qb\vec{e}_z$$

$\Rightarrow \underline{\phi(\vec{r}) \approx 2qzb/|\vec{r}|^3}$

Aufgabe 5: Induktion in bewegter Leiterschleife (6 Punkte)

$U(t) = \oint \mathrm{d}\vec{r}\, \vec{E}(\vec{r}, t) \overset{\text{Stokes}}{=} \int \mathrm{d}\vec{A} \cdot (\vec\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t)) \overset{\text{Max2}}{=} -\frac{1}{c} \int \mathrm{d}\vec{A} \cdot \dot{\vec{B}}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c}\partial_t \int \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)$

$$\text{Es gilt } \int \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = \begin{cases} 0 & , t < t_1 \\ B_0 b_2 v_0 (t - t_1) & , t_1 < t < t_2 \\ B_0 b_2 b_1 & , t > t_2 = t_1 + \frac{b_1}{v_0} \end{cases} \Rightarrow \underline{U(t) =} \begin{cases} 0 \\ -\frac{1}{c}\, B_0 b_2 v_0 \\ 0 \end{cases}$$



Aufgabe 6: Rotierende geladene Hohlkugel (2+2+3=7 Punkte)

(a) In Kugelkoord (r, θ, φ) ist $\underline{\rho(\vec{r}) = \sigma\, \delta(r - R)} \Rightarrow \underline{\vec{j}(\vec{r}) =} \rho(\vec{r})\, \vec{v}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\omega r \sin(\theta)\vec{e}_\varphi = \underline{\sigma R\omega\delta(r - R)\sin(\theta)\vec{e}_\varphi}$

$$\text{(b) } \underline{\vec{m} =} \frac{1}{2c} \int \mathrm{d}^3 r\, \vec{r} \times \vec{j} = \frac{\sigma R\omega}{2c} \int \mathrm{d}^3 r\, R\delta(r - R)\sin(\theta)\, \underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi}_{= -\vec{e}_\theta} = \frac{\sigma R^4 \omega\pi}{c} \underbrace{\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \sin^3(\theta)}_{= [\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta]_0^\pi}\, \vec{e}_z = \frac{4\pi\omega\sigma R^4}{3c}\, \vec{e}_z = \underline{\frac{\omega Q R^2}{3c}\, \vec{e}_z}.$$

(c) $\underline{\vec{A}(\vec{r})\Big|_{\text{Dipol}}} = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\omega Q R^2}{3c}\, \frac{1}{r^2}\, \vec{e}_z \times \vec{e}_r = \underline{\frac{\omega Q R^2}{3c}\, \frac{1}{r^2}\, \sin(\theta)\vec{e}_\varphi} \Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \vec\nabla \times \vec{A} = \vec\nabla \times (\vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3})$,
$\underline{\vec{B}(\vec{r})} \overset{\text{bac-cab}}{=} \vec{m}(\vec\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}) - (\vec{m} \cdot \vec\nabla)\frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{m}(\frac{3}{r^3} - 3\frac{r^2}{r^5}) - |\vec{m}|\partial_z\, \frac{\vec{r}}{r^3} = -|\vec{m}|\frac{\vec{e}_z}{r^3} + 3|\vec{m}|\frac{z\,\vec{e}_r}{r^4} = \underline{\frac{\omega Q R^2}{c r^3}\, (\frac{z}{r}\, \vec{e}_r - \frac{1}{3}\, \vec{e}_z)}$.