Theoretische Physik I: Delta-Sonderblatt	12.11.2013

Definierende Eigenschaft der **Delta–Funktion**: $\int dx\, \delta(x-x_0)\, f(x) \;=\; f(x_0)$

δ–Darstellungen:

$$\delta(x) \;=\; \frac{1}{2\,\varepsilon} \quad \text{für} \;\; -\varepsilon < x < \varepsilon \quad \text{und 0 sonst}$$

$$\delta(x) \;=\; \partial_x \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x/\varepsilon}} = -\partial_x \frac{1}{\mathrm{e}^{x/\varepsilon}+1}$$

$$\delta(x) \;=\; \frac{\varepsilon}{\pi x^2}\sin^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad , \quad \delta(x) \;=\; \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon^2}$$

$$\delta(x) \;=\; \frac{1}{\pi x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dk\;\cos(kx) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dk\;\mathrm{e}^{ikx}$$

$$\delta(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\,\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi}\int dk\;\mathrm{e}^{ikx-\varepsilon|k|} = \frac{1}{2\pi}\int dk\;\mathrm{e}^{ikx}\left(\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|}\right)$$

allgemein: $$\delta(x) \;=\; \frac{1}{\varepsilon F}\, g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{mit} \;\; F := \int dx\; g(x)$$

Stufenfunktion θ: $\partial_x\theta(x) = \delta(x)$, $\partial_x\Big(\theta(x)\text{–Darst.}\Big) \;=\; \delta(x)\text{–Darst.}$

$$\theta(x) = 1-\theta(-x) \;\;,\;\; \mathrm{sign}\,(x) = \frac{x}{|x|} = 2\,\theta(x)-1$$

δ–Formeln: $\delta(-x) = \delta(x) \quad , \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \quad , \quad \delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2|a|}\Big(\delta(x-a)+\delta(x+a)\Big)$

allgemein: $\delta\big(f(x)\big) \;=\; \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|}\,\delta(x-x_n)$, x_n sind die (einfachen) Nullstellen von f

$\frac{1}{i}\int_0^\infty dk\;\mathrm{e}^{ikx-\varepsilon k} = \frac{1}{x+i\varepsilon} = \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \mathcal{P}\frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$, $\mathcal{P}$ für *Principal value* (Hauptwert)

$$\int dx\; f(x)\,\delta'(x) = -f'(0) \;\;,\;\; -x\,\delta'(x) = \delta(x) \;\;,\;\; \int dx\;\delta(x-a)\,\delta(x-b) \;=\; \delta(a-b)$$

δ–Physik:

Punktladung q bei $\vec{r}_0(t)$: $\varrho(\vec{r},t) = q\;\delta\Big(\vec{r}-\vec{r}_0(t)\Big) \quad , \quad \vec{\jmath}\,(\vec{r},t) = \dot{\vec{r}}_0(t)\;\,q\;\delta\Big(\vec{r}-\vec{r}_0(t)\Big)$

Geladener Kreisring : $\varrho(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi R}\,\delta(\varrho-R)\,\delta(z)$

Geladene Metallkugel : $\varrho(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi R^2}\,\delta(r-R)$

Der Ortsoperator X (Wirkungsweise $x\cdot$) hat gemäß $x\,\delta(x-a) \;=\; a\,\delta(x-a)$ die kontinuierlich mit a numerierten Eigenfunktionen $\delta(x-a)$.

Sei L ein (auf x–Abh. wirkender) linearer Operator, und $L\,y(x) = f(x)$. Gesucht ist $y(x)$.
Wenn man dieses Problem für eine "Punktquelle" , d.h. das Hilfsproblem $L\;G(x,a) = \delta(x-a)$ lösen kann und somit eine "Greensche Funktion" $G(x,a)$ kennt, dann erhält man ein $y(x)$ durch Anwenden des Operators $\int da\; f(a)$ auf beiden Seiten des Hilfsproblems:

$$L\int da\; f(a)\,G(x,a) = \int da\; f(a)\,L\,G(x,a) = \int da\; f(a)\,\delta(x-a) = f(x)$$

$$\Rightarrow y(x) = \int da\; f(a)\,G(x,a) \quad .$$