Lösungsvorschlag Blatt 15

54) $\phi' = \phi - \frac{\dot{\chi}}{c}$, $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi \Rightarrow A'^{\mu} = A^{\mu} - \partial^{\mu}\chi$

$$\Rightarrow F^{\mu\nu\prime} = \partial^{\mu}A'^{\nu} - \partial^{\nu}A'^{\mu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu} - (\partial^{\mu}\partial^{\nu} - \partial^{\nu}\partial^{\mu})\chi = F^{\mu\nu}$$

55) $Q_K = \int d^3\vec{r}\, \rho_K(\vec{r}) = q$

$$Q_e = \int d^3\vec{r}\, \rho_e(\vec{r}) = -\frac{4q}{a_0^3}\int_0^{\infty} dr\, r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} = -\frac{q}{2}\int_0^{\infty} dr\, r^2 e^{-r} = -\frac{q}{2}\partial_{\alpha}^2 \int_0^{\infty} dr\, e^{-\alpha r}\Big|_{\alpha=1}$$

$$= -\frac{q}{2}\partial_{\alpha}^2 \frac{1}{\alpha}\Big|_{\alpha=1} = -q$$

$\vec{E}_K(\vec{r}) = \frac{q}{r^2}\vec{e}_r$; $\phi_K(\vec{r}) = \frac{q}{r}$ Punktladung bereits bekannt.

Mit Kugelsymmetrie folgt aus $\int d\vec{f}\,\vec{E} = 4\pi \int dV \rho$ $\quad (\vec{E}(\vec{r}) = \vec{e}_r E(r))$

$$E_e(r) = \frac{1}{r^2}\int dV(r)\, \rho_e = -\frac{q}{r^2\pi a_0^3}\cdot 4\pi \int_0^r dr'\, r'^2 e^{-\frac{2r'}{a_0}} = -\frac{q}{2r^2}\partial_{\alpha}^2 \int_0^{\frac{2r}{a_0}} dr'\, e^{-\alpha r'}\Big|_{\alpha=1}$$

$$= -\frac{q}{2r^2}\partial_{\alpha}^2\left[-\frac{e^{-\alpha\frac{2r}{a_0}}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right] = q\left(\frac{2}{a_0^2} + \frac{2}{a_0 r} + \frac{1}{r^2}\right)e^{-\frac{2r}{a_0}} - \frac{q}{r^2}$$

$$\phi_e(r) = -\int dr\, E(r) = q\left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{r}\right)e^{-\frac{2r}{a_0}} - \frac{q}{r}$$

((Alternativ: $\phi(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}'\, \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$, dann $\vec{E} = -\nabla\phi$, evtl. kürzer))

$$E(r) = E_K(r) + E_e(r) = q\left(\frac{2}{a_0^2} + \frac{2}{a_0 r} + \frac{1}{r^2}\right)e^{-\frac{2r}{a_0}} = \frac{q}{2r^2}(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$$

$x \to \infty \Rightarrow E(r)$ fällt exponentiell ab $\Rightarrow$ "Atom aus der Ferne nicht sichtbar"

$x \to 0 \Rightarrow E(r) \approx \frac{q}{r^2} \Rightarrow$ "Für $r \ll a_0$ nur das Proton sichtbar".

56) Maxwell: $-\frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = \nabla\times\vec{E} = -E_0\vec{e}_3 k\left[\Theta(x)\sin(kx-\omega t) + \Theta(-x)\sin(kx+\omega t)\right]$

$$+ E_0\vec{e}_3\underbrace{\left[\delta(x)\cos(kx-\omega t) - \delta(x)\cos(kx+\omega t)\right]}_{=0}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \underbrace{\frac{ck}{\omega}}_{=1} E_0\vec{e}_3\left[\Theta(x)\cos(kx-\omega t) - \Theta(x)\cos(kx+\omega t)\right] \quad (+\text{const})$$

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi}\left[\nabla\times\vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}}\right] = \frac{c}{4\pi}\vec{e}_2\left[-\partial_x B_3 - \frac{1}{c}\partial_t E_2\right]$$

$$= \frac{cE_0\vec{e}_2}{4\pi}\Big[\left(-\delta(x)\cos(kx-\omega t) - \delta(x)\cos(kx+\omega t)\right) + k\left(\Theta(x)\sin(kx-\omega t) - \Theta(-x)\sin(kx+\omega t)\right)$$

$$- \frac{\omega}{c}\left(\Theta(x)\sin(kx-\omega t) - \Theta(-x)\sin(kx+\omega t)\right)\Big]$$

$$= -\vec{e}_2\frac{cE_0}{2\pi}\delta(x)\cos(\omega t)$$

57) Für die Potentialdifferenz gilt: (zunächst für feste Fläche, variables $\vec{B}$)

$$U(t) = \oint d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r},t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stokes}}}{=} \int d\vec{A}\cdot(\nabla\times E(\vec{r},t)) = -\frac{1}{c}\int d\vec{A}\,\dot{\vec{B}}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int d\vec{A}\cdot\vec{B}(\vec{r},t)$$

(Gilt immer noch, wenn wir das Koord.-system drehen $\Rightarrow d\vec{A} \to d\vec{A}(t)$)

$\Rightarrow$ mit $\int d\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{B}|L^2 \cdot \cos(\omega(t-t_0))$:

$$U(t) = \frac{\omega L^2}{c}|\vec{B}| \sin(\omega(t-t_0))$$