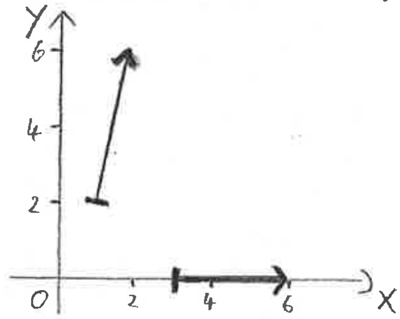
Lösungsvorschläge Blatt 9 (Probeklausur Mechanik)

30) a) $\vec{F}(3,0,0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{F}(1,2,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Da $\vec{F}$ unabh. von z, zeichne in 2D:



b) z.B via : $\vec{F}$ def. auf ganz $\mathbb{R}^3$ => einfach zusammenhängendes Gebiet

& $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{-1}{(x^2+2y^2+1)^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 40xy - 40xy \end{pmatrix} = 0$

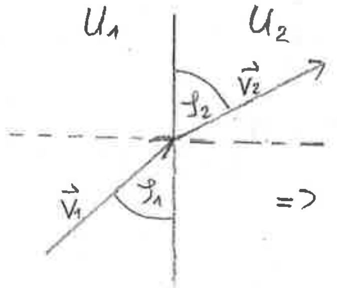
einfacher: $\vec{F}$ hat ein Potenzial (siehe c)

c) $V(\vec{r}) = -5\ln(x^2+2y^2+1) + 42$ durch Hingucken. Check: • $-\nabla V = \vec{F}$ ✓

• $V(\vec{0}) = 42$ ✓

d) Arbeit = Potentialunterschied, $W = V(1,-2,5) - V(-3,0,2) = -5\ln(10)+42-(-5\ln(10)+42) = 0$

31)



φ_1, φ_2 sind die Winkel zwischen den Geschwindigkeiten $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ und der Übergangsebene zwischen U_1 und U_2. Da sich das Potenzial nur senkrecht zu dieser Ebene ändert, ist der Impuls parallel zur Ebene erhalten. ($\dot{\vec{p}} = \vec{F} = -\nabla V \perp$ Ebene)

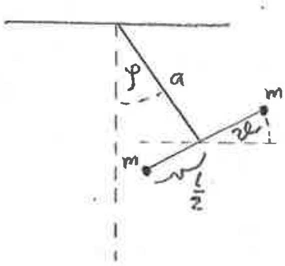
$$\Rightarrow \vec{p} = \vec{p}_{\parallel} + \vec{p}_{\perp} \ , \ |\vec{p}_{\parallel,1}| = |\vec{p}_{\parallel,2}|$$

$$\Leftrightarrow m v_1 \cos(\varphi_1) = m v_2 \cos(\varphi_2) \Rightarrow v_2 = v_1 \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)}$$

Energieerhaltung: $\frac{m}{2} v_1^2 + U_1 = \frac{m}{2} v_2^2 + U_2 \Rightarrow \frac{m}{2} v_1^2 \left(1 - \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)}\right) = U_2 - U_1$

$$\Rightarrow \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} = \sqrt{1 + \frac{2}{m v_1^2}(U_1 - U_2)}$$

32)



Die Aufgabe wird einfacher, wenn man sieht, dass der Schwerpunkt genau am Verbindungspunkt von Stange und Stab liegt und Rotation und Pendelbewegung daher entkoppeln. (Geht auch ohne diese Erkenntnis, aber das Aufstellen von L wird dann deutlich länger.)

$$\Rightarrow V = -2mga\cos(\varphi) \ , \ T = \frac{2m}{2} a^2 \dot{\varphi}^2 + 2\frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 \dot{\vartheta}^2$$

$$\Rightarrow L = m\left[a^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\vartheta}^2 + 2ga\cos(\varphi)\right]$$

$$\Rightarrow \text{e.o.m.}: \ \ddot{\varphi} = -\frac{g}{a}\sin(\varphi) \approx -\frac{g}{a}\varphi \ \wedge \ \ddot{\vartheta} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \varphi(0)\cos(\omega t) + \frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega}\sin(\omega t) \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$$

$$\vartheta(t) = \vartheta(0) + \dot{\vartheta}(0)\, t$$

Aufgabe 33: Kanonische Transformationen

(a) Hamilton'sche Bewegungsgleichungen:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = bpq^4 \tag{1}$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{a}{q^3} - 2bp^2q^3 \tag{2}$$

Aus (1) folgen durch Ableitung nach der Zeit bzw. Umstellen nach p:

$$\ddot{q} = b\dot{p}q^4 + 4bpq^3\dot{q} \tag{3}$$
$$p = \frac{\dot{q}}{bq^4} \tag{4}$$

Nutze Gleichungen (2) und (4) um $\dot{p}$ und p aus (3) zu eliminieren:

$$\ddot{q} = abq + 2\frac{\dot{q}^2}{q} \tag{5}$$

(b) Die Transformation

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{q} \\ Q &= pq^2 \end{aligned} \tag{6}$$

erfüllt die Bedingung, da

$$H'(Q,P) = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}Q^2 \tag{7}$$

und

$$\{P,Q\}_{p,q} = \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} = 0 - \left(-\frac{1}{q^2}\right)(q^2) = 1. \tag{8}$$

Daraus ergibt sich mit der bekannten Lösung

$$q = \frac{1}{P} = \frac{1}{-m\omega Q_0 \sin(\omega t)} \equiv \frac{\alpha}{\sin(\omega t)}. \tag{9}$$

Einsetzen in (5) zeigt, dass diese Lösung die Bewegungsgleichung erfüllt:

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= -\alpha\omega\frac{\partial}{\partial t}\frac{\cos(\omega t)}{\sin^2(\omega t)} = \alpha\omega^2\left(2\frac{\cos^2(\omega t)}{\sin^3(\omega t)} + \frac{1}{\sin(\omega t)}\right) \\ abq + 2\frac{\dot{q}^2}{q} &= \alpha\omega^2\frac{1}{\sin(\omega t)} + 2\alpha\omega^2\frac{\cos^2(\omega t)}{\sin^4(\omega t)}\sin(\omega t) \\ &= \alpha\omega^2\left(2\frac{\cos^2(\omega t)}{\sin^3(\omega t)} + \frac{1}{\sin(\omega t)}\right) \end{aligned} \tag{10}$$