9) a) $z_s(t) = g/2\, t^2$ Schwerpunkt fällt wie Punktmasse

b) Betrachte zunächst erdfeste Koordinaten z_{E1}, z_{E2}.

Kraft auf m_1: $m_1 \ddot{z}_{E1}(0) = m_1 g + \underbrace{m_2 g}_{\text{Feder}} \Rightarrow \ddot{z}_{E1}(0) = \frac{m_1+m_2}{m_1} g$

" m_2: $m_2 \ddot{z}_{E2}(0) = m_2 g - \underbrace{m_2 g}_{\text{Feder}} = 0 \Rightarrow \ddot{z}_{E2}(0) = 0$

c) Wechsle nun auf Koordinaten z_1, z_2 relativ zum Schwerpunkt. Das fallende System kann als Inertialsystem ohne Gravitation angesehen werden, da sich Gewichtskräfte $+m_i g$ und Scheinkräfte $-m_i g$ genau aufheben. Dann gilt:

$l_0 \equiv$ Länge der Feder in der Gleichgewichtslage ohne Gravitation.

$m_1 z_1(t) + m_2 z_2(t) = 0 \Rightarrow z_2(t) = -\frac{m_1}{m_2} z_1(t)$

$m_1 \ddot{z}_1 = F_{Feder} = K(z_2 - z_1 - L_0) = -K \frac{m_1+m_2}{m_2} z_1 - K L_0 \Rightarrow \ddot{z}_1(t) + \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} K z_1(t) = -\frac{L_0}{m_1} K$

$\Rightarrow z_1(t) = A_1 \cos(\omega t) - \frac{L_0 m_2}{m_1+m_2}$ mit $\omega = \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} K}$ (Kein sin-Term da $\dot{z}_1(0) = 0$)

d) $\Rightarrow \ddot{z}_1(0) = -A_1 \omega^2 \overset{\text{see b) ohne Grav.}}{=} \frac{m_2}{m_1} g \Rightarrow |A_1| = \frac{m_2}{m_1}\frac{g}{\omega^2} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{m_2 g}{K}$

$|A_2| = \frac{m_1}{m_2}|A_1| = \frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{m_2 g}{K}$

10) a) $\dot{\vec{M}} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \alpha \dot{\vec{e}}_r = \alpha\left(\nabla\frac{1}{r}\right) \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) - \alpha \dot{\vec{e}}_r = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{e}}_r) - \alpha\dot{\vec{e}}_r$

$\dot{\vec{L}} = 0$, $\ddot{\vec{r}} = -\frac{1}{m}\nabla V$, $\vec{r}\times\dot{\vec{r}} = \vec{r} \times r\dot{\vec{e}}_r$

$= -\frac{\alpha}{r^2} \vec{r}\underbrace{(\vec{r}\cdot\dot{\vec{e}}_r)}_{=0 \text{ da } \dot{\vec{e}}_r \perp \vec{e}_r} + \frac{\alpha\dot{\vec{e}}_r}{r^2}(\vec{r}\cdot\vec{r}) - \alpha\dot{\vec{e}}_r = 0$

b) Offensichtlich gilt $\vec{M} \perp \vec{L}$. Da $\vec{M} = \text{const}$ gibt es aber natürlich noch ∞ viele (weniger interessante) Ebenen, in denen $\vec{M}$ liegt. Mit den Anfangsbed. aus c) erhalten wir z.B.

$\vec{M} = \begin{pmatrix}0\\v_0\\0\end{pmatrix} \times \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\m r_0 v_0\end{pmatrix}}_{=L} - \begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\end{pmatrix} = (v_0 L - \alpha)\,\vec{e}_r(0) \quad (= \alpha e\, \vec{e}_r(0))$

Zum Zeitpunkt wo $\vec{r} \perp \dot{\vec{r}}$ liegt $\vec{r}$ parallel zur Hauptachse der Ellipse. $\Rightarrow \vec{M} \parallel$ Hauptachse

c) Betrachte $\vec{r}\cdot\vec{M} = |\vec{M}|\cdot r\cdot\cos(\varphi) = |\vec{M}|\cdot x = (v_0 L - \alpha)\cdot x = \alpha(\lambda-1)x$ mit $L = \frac{\alpha\lambda}{v_0}$

aber auch $\vec{r}\cdot\vec{M} = \underbrace{\vec{r}\cdot(\dot{\vec{r}}\times\vec{L})}_{=\vec{L}\cdot(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) = \frac{L^2}{m}} - \alpha\vec{r}\cdot\vec{e}_r = \frac{L^2}{m} - \alpha r = \alpha r_0 \lambda - \alpha r$

$\Rightarrow \alpha(\lambda-1)x = \alpha r_0 \lambda - \alpha r \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 = (r_0\lambda - (\lambda-1)x)^2 = (\lambda-1)^2 x^2 - 2\lambda(\lambda-1) r_0 x + \lambda^2 r_0^2$

$\Rightarrow y^2 = \lambda(\lambda-2)x^2 - 2\lambda(\lambda-1) r_0 x + \lambda^2 r_0^2$

- $\lambda = 0 \Rightarrow y = 0$ Gerade
- $\lambda = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = r_0^2$ Kreis
- $\lambda = 2 \Rightarrow x = -\frac{y^2}{4r_0} + r_0$ Parabel
- $0 < \lambda < 2 \Rightarrow y^2 + \lambda(2-\lambda)\left(x - \frac{\lambda-1}{\lambda-2} r_0\right)^2 = \overbrace{\lambda^2 r_0^2 - \frac{\lambda(\lambda-1)^2}{\lambda-2} r_0^2}^{= \frac{\lambda}{2-\lambda} r_0^2}$ Ellipse
- $\lambda > 2 \Rightarrow$ " Hyperbel

11) a) $V_{eff} = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) = \left(\frac{L^2}{2\mu} - \alpha\right)\frac{1}{r^2} =: \frac{\beta}{r^2}$

- $\beta > 0$  $\Rightarrow E > 0$ ungebunden
- $\beta = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2}\dot r^2 \Rightarrow r = const \pm \sqrt{\frac{2E}{\mu}}\, t \;,\; E \geq 0$
- $\beta < 0$  $\rightarrow \begin{cases} E \geq 0 & \text{ungebunden} \\ E < 0 & \text{gebunden (fällt ins Zentrum)} \end{cases}$

b) $\frac{dr}{dt} = \dot r = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}}\sqrt{E - V_{eff}} \quad \Rightarrow \quad dt = \pm\sqrt{\frac{\mu}{2}}\frac{dr}{\sqrt{E - V_{eff}}}$

$$\Rightarrow t - t_0 = \int_{t_0}^{t} dt' = \pm\int_{r_0}^{r} dr' \sqrt{\frac{\mu}{2}}\frac{r'}{\sqrt{E r'^2 - \beta}} = \pm\sqrt{\frac{\mu}{2}}\frac{1}{E}\left(\sqrt{E r^2 - \beta} - \sqrt{E r_0^2 - \beta}\right)$$

Für passendes t_0: $t = \pm\frac{1}{E}\sqrt{\frac{\mu}{2}}\sqrt{E r^2 - \beta}$, $r(t) = \sqrt{\frac{2Et^2}{\mu} + \frac{\beta}{E}}$ ($\pm \rightarrow$ für Bewegung nach außen/inne

Fall ins Zentrum: $\beta \overset{!}{<} 0, E \overset{!}{<} 0$; $T = t(r=0) - t(r_0) = \frac{1}{E}\sqrt{\frac{\mu}{2}}\left(\sqrt{-\beta} - \sqrt{E r_0^2 - \beta}\right)$

c) Aus der Vorlesung:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'^2}\frac{L}{\sqrt{2\mu(E - V(r')) - \frac{L^2}{r'^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\mu}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'^2}\frac{L}{\sqrt{E - \frac{\beta}{r'^2}}}$$

$u = \frac{1}{r'}$, $dr' = -\frac{du}{u^2}$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\mu}}\int_{1/r_0}^{1/r} du \frac{L}{\sqrt{E - \beta u^2}} \overset{E\neq 0,\, \beta\neq 0}{=} +\frac{L}{\sqrt{2\mu\beta}}\int_{\sqrt{\frac{\beta}{E r_0^2}}}^{\sqrt{\frac{\beta}{E r^2}}} du \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= +\frac{L}{\sqrt{2\mu\beta}}\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{\beta}{E r^2}}\right) - \arccos\left(\sqrt{\frac{\beta}{E r_0^2}}\right)\right)$$

Bei passender Wahl von φ_0: $\varphi(r) = \frac{L}{\sqrt{2\mu\beta}}\arccos\left(\sqrt{\frac{\beta}{E r^2}}\right)$