Theoretische Physik I: Übungen	**Blatt Nr. 13**	14.1.2014

[Besprechung 22.1 - 24.1 in den Übungen]

[Ü: Mi 14-16 (D01-249); Do 16-18 (D01-249), Fr 8-10 (S2-143), 10-12 (D01-249), 12-14 (F1-125, V3-204)]

Aufgabe 46: Elektrische Multipolmomente

Eine unendlich dünne Kreisscheibe mit Radius R sei homogen mit der Flächenladungsdichte σ geladen, beschrieben durch die Ladungsverteilung $\rho(\vec{x}) = \sigma\,\Theta(R-r)\,\delta(z)$ mit $r := \sqrt{x^2+y^2}$ in Zylinder-Koordinaten.

(a) Wie groß ist das elektrostatische Potential $\phi(\vec{x})$ auf der z-Achse?

(b) Berechnen Sie die Gesamtladung Q, das Dipolmoment $\vec{p}$ und den Quadrupoltensor Q^{ij} dieser Ladungsverteilung.

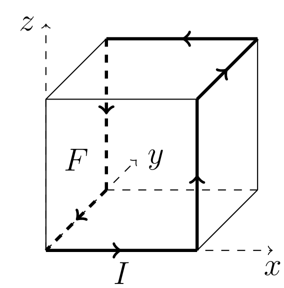
(c) Geben Sie die Multipolentwicklung des Potentials bis zum Quadrupolterm an, und vergleichen Sie das Resultat für $\vec{x} = z\vec{e}_z$ mit dem Resultat aus (a).

Aufgabe 47: Magnetisches Dipolmoment

(a) Zeigen Sie, dass das magnetische Dipolmoment $\vec{m}$ eines unendlich dünnen mit Strom I durchflossenen Drahts durch $\vec{m} = -\frac{I}{2}\int d\vec{r} \times \vec{r}$ gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, dass für eine ebene Stromschleife $|\vec{m}| = I \cdot F$ gilt.

(c) Berechnen Sie das magnetische Dipolmoment für eine Stromschleife wie in nebenstehender Abbildung (Würfellänge a).



Aufgabe 48: Transformation von Multipolen

Wie transformieren sich die Gesamtladung Q, das Dipolmoment $\vec{p}$ und der Quadrupoltensor Q^{ij} einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$

(a) unter Translationen des Koordinatenursprungs (mit Vektor $\vec{a}$),

(b) unter Drehungen des Koordinatensystems (mit Drehmatrix R)?

Aufgabe 49: Greensche Funktion

(a) Zeigen Sie, dass die Greensche Funktion des in der (modifizierten Helmholtz-)Gleichung $L_x f(x) = g(x)$ auftretenden linearen Operators $L_x = \partial_x^2 - k^2$ durch $G(x,x') = c\,\exp(-k|x-x'|)$ gegeben ist und bestimmen Sie den entsprechenden Vorfaktor c.

(b) Ermitteln Sie die Lösung $f(x)$ der modifizierten Helmholtz-Gleichung für den Fall $g(x) = \Theta(x-a)\,\Theta(b-x)$, wobei $a < b$.

(c) In der Vorlesung (Kapitel 6.3, S.81) haben wir das Coulomb-Potential mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes bestimmt. Zeigen Sie, dass $G(\vec{r},\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$ die Greensche Funktion des Laplace-Operators ist, also $\triangle G(\vec{r},\vec{r}') = \delta(\vec{r}-\vec{r}')$ löst. [Vorsichtsmaßnahme: $1/|\vec{r}-\vec{r}'| \to 1/\sqrt{(\vec{r}-\vec{r}')^2+\epsilon^2}$, $\epsilon = 0^+$]