Aufgabe 38: Ein Theorem der Vektoranalysis
Zeigen Sie, dass

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{r}'}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\vec{W}(\vec{r}') - \vec{\nabla}\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{r}'}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}Q(\vec{r}') \qquad \text{mit } \vec{\nabla}\cdot\vec{W}(\vec{r}) = 0$$

die Bedingungen $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}) = Q(\vec{r})$ und $\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}) = \vec{W}(\vec{r})$ erfüllt (vgl. Skript §6.2, S.79).

Aufgabe 39: Elektrostatik: Vollkugel
Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ und das elektrische Potential Φ einer homogen geladenen Vollkugel mit Radius R und Gesamtladung Q.

Aufgabe 40: Geladener Stab
Gesucht ist das elektrische Potential eines homogen geladenen (mit Ladung/Länge $= \lambda$) und unendlich dünnen geraden Stabes (wählen Sie die z-Achse in Richtung des Stabes).

(a) Betrachten Sie zunächst einen unendlich langen Stab. Nutzen Sie die Symmetrie des Problems aus, um den Fluss des elektrischen Feldes durch einen endlich hohen Zylinder, der symmetrisch um den Stab herum liegt, zu berechnen. Bestimmen Sie daraus das elektrische Feld und das Potential.

(b) Betrachten Sie nun einen Stab der Länge $2a$ mit Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems. Geben Sie die Ladungsdichte in kartesischen Koordinaten an und bestimmen Sie daraus das Potential $\Phi(\vec{r})$.

(c) Erhalten Sie für das Ergebnis aus (b) im Limes $a \to \infty$ wieder das Potential aus (a)? Wie ergibt sich im Grenzfall $a \to 0$ das Coulomb-Potential (bei fester Gesamtladung $q = 2a\lambda$)?

Aufgabe 41: Kugelschale
Der Raum zwischen zwei konzentrischen Kugeln mit den Radien R_1 und $R_2 \quad (> R_1)$ sei mit der Dichte

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{a}{r^2} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $a > 0$ geladen. Berechnen Sie das elektrische Feld in den drei Raumbereichen. Bestimmen Sie dann das elektrische Potential Φ. Beachten Sie dabei, dass das Potential eine stetige Funktion sein muss. Legen Sie die Konstante so fest, dass Φ im Unendlichen verschwindet.