[Besprechung 11.12 - 13.12 in den Übungen]

[Klausurbedingungen: max. 2 Stunden Bearbeitungszeit, kein Skript, keine anderen Hilfsmittel.]

Aufgabe 30: Kräfte und Potentiale

Alle Größen in dieser Aufgabe sind als dimensionslos anzunehmen. Gegeben sei das Kraftfeld

$$\vec{F} = \left(\frac{10x}{x^2 + 2y^2 + 1}, \frac{20y}{x^2 + 2y^2 + 1}, 0 \right).$$

(a) Zeichnen Sie dieses Kraftfeld an den Punken $(3, 0, 0)$ und $(1, 2, 0)$ in ein Koordinatensystem.

(b) Zeigen Sie, dass das Kraftfeld konservativ ist.

(c) Berechnen Sie das Potential V des Kraftfeldes unter der Zusatzbedingung $V(0, 0, 0) = 42$.

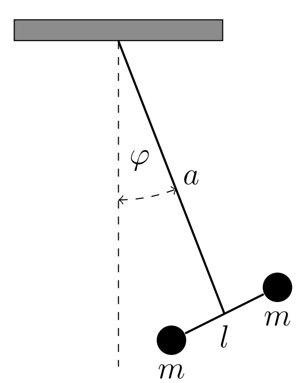
(d) Eine Masse soll im Kraftfeld vom Punkt $(-3, 0, 2)$ zum Punkt $(1, -2, 5)$ befördert werden. Welche Arbeit wird dabei verrichtet?

Aufgabe 31: Energie- und Impulserhaltung

Der Raum sei unterteilt in zwei Halbräume mit unterschiedlichen Potentialen. Ein Teilchen der Masse m, das sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_1$ bewegt, geht aus einem Halbraum, in dem seine potentielle Energie konstant und gleich U_1 ist, in den anderen Halbraum über, wo diese Energie auch konstant, aber gleich U_2 ist. Welche Komponenten des Impulses sind dabei erhalten und weshalb? Bestimmen Sie eine Relation zwischen Eintritts- und Austrittswinkel an der Übergangs-Ebene, die nur von U_1, U_2 und $v_1 \equiv |\vec{v}_1|$ abhängt.

Aufgabe 32: Ebenes Pendel mit rotierender Masse

Zwei Punktmassen m im Schwerefeld der Erde seien durch einen starren, gewichtslosen Stab der Länge l verbunden. Das Zentrum des Stabes ist an einer starren, gewichtslosen Stange der Länge a reibungsfrei drehbar aufgehängt. Die Stange sei derart drehbar an der Decke befestigt (ebenfalls reibungsfrei), dass sich die ganze Anordnung nur in der in der Skizze dargestellten Ebene bewegen kann. Stellen Sie die Lagrangefunktion des Problems auf und lösen Sie die Bewegungsgleichungen für kleine Winkel φ zwischen der Stange und der Senkrechten ($\sin(\varphi) \approx \varphi$).



Bitte wenden!

Aufgabe 33: Kanonische Transformationen

Gegeben sei ein System mit der Hamilton-Funktion

$$H(q,p) = \frac{a}{2}\frac{1}{q^2} + \frac{b}{2}p^2 q^4, \quad a, b > 0,$$

wobei q eine Ortskoordinate und p der zu q kanonisch konjugierte Impuls sei.

(a) Berechnen Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen für dieses System. Zeigen Sie (durch Ableitung einer dieser Gleichungen und Eliminierung von p und $\dot{p}$), dass für die Ortskoordinate die Bewegungsgleichung

$$\ddot{q} = abq + 2\frac{\dot{q}^2}{q} \tag{1}$$

gilt.

(b) Finden Sie eine kanonische Transformation $Q = Q(q,p)$, $P = P(q,p)$, die die Hamilton-Funktion auf die Form eines harmonischen Oszillators bringt:

$$H'(Q,P) = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}Q^2, \quad m = \frac{1}{a},\ \omega^2 = ab$$

Die Lösung für Q und P ist hinlänglich bekannt und kann mit passenden Anfangsbedingungen als $Q(t) = Q_0\cos(\omega t)$, $P(t) = -m\omega Q_0 \sin(\omega t)$ geschrieben werden. Transformieren Sie diese Lösung zurück auf die ursprüngliche Variable q und zeigen Sie, dass sie die Bewegungsgleichung (1) erfüllt.