

Aufgabe 26: Kanonische Transformationen für $s=1$

- (a) Zeigen Sie, dass $\det M = \{Q, P\}_{qp} = 1$ aus $M^T J M = J$ folgt.
- (b) Welche der folgenden Phasenraumtransformationen $(Q(q, p), P(q, p))$ sind kanonisch (d.h. $M^T J M = J$)?

$$(p, q); \quad (p, -q); \quad \left(pq^2, \frac{1}{q}\right); \quad (\ln p, -qp); \quad \left(\arctan\left(\frac{q}{p}\right), \frac{q^2 + p^2}{2}\right)$$

- (c) Für welche Werte von a, b ist $(Q = q^a \cos(bp), P = q^a \sin(bp))$ kanonisch?

Aufgabe 27: Kanonische Transformation für $s=2$

- (a) Beweisen Sie, dass folgende Transformation kanonisch ist

$$\begin{aligned} p_1 &= \sqrt{k_1 P_1} \sin Q_1 + \sqrt{k_2 P_2} \sin Q_2, & p_2 &= \sqrt{k_1 P_1} \sin Q_1 - \sqrt{k_2 P_2} \sin Q_2, \\ q_1 &= -\sqrt{\frac{P_1}{k_1}} \cos Q_1 - \sqrt{\frac{P_2}{k_2}} \cos Q_2, & q_2 &= -\sqrt{\frac{P_1}{k_1}} \cos Q_1 + \sqrt{\frac{P_2}{k_2}} \cos Q_2. \end{aligned}$$

- (b) Lösen Sie mit der Transformation aus Teil (a) die Bewegungsgleichungen für

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{k_1^2}{4}(q_1 + q_2)^2 + \frac{k_2^2}{4}(q_1 - q_2)^2.$$

Aufgabe 28: Phasenraum

Ein Massenpunkt in einer Dimension mit Koordinate x bewege sich im Potential

$$V(x) = \begin{cases} +ax & \text{für } x \geq 0, \\ -bx & \text{für } x < 0, \end{cases} \quad a, b \geq 0.$$

- (a) Leiten Sie die Hamilton-Funktion und die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen her. Bestimmen Sie die Periode $T(E)$ der Bewegung als Funktion der Energie E (hierbei seien $a, b > 0$).
- (b) Skizzieren Sie das Potential und die Phasenraumtrajektorien. Für letztere betrachten Sie vier verschiedene Fälle: $a = b = 1$; $a = 2b = 2$; $a = \infty$ und $b = 1$; $a = 0$ und $b = 1$.

Aufgabe 29: Lorentz-Transformation

Ein Stab der Ruhelänge L' schließt in seinem Ruhesystem Σ' mit der x' -Achse den Winkel θ' ein. Σ' bewegt sich bzgl. Σ mit der Geschwindigkeit $\vec{u} = u\vec{e}_x$. Welche Stablänge L und welchen Winkel θ zur x -Achse misst der Beobachter in Σ ?