

$$\text{also : } 0 = p_\mu p^\mu - m^2 = (\gamma^0 p_0 - m)(\gamma^0 p_0 + m)$$

Faktorisierung schlägt ✓

nehme z.B.  $0 = \gamma^0 p_0 - m$  ((+m ist äquivalent, s. später...))

getötet wieder  $p^0 = E \rightarrow i\partial_E$  und  $p_i = -\vec{p}^i \rightarrow i\partial_i$  (( $\Leftrightarrow p_\mu \rightarrow i\partial_\mu$ ))

$$\text{so dass } \boxed{(\gamma^0 p_0 - m) \varphi = 0} \quad \text{"Dirac-Gl."}$$

Bemerkung: 4 Gl.:  $\varphi = \text{Dirac-Spinor} = 4\text{-komponentiger Spaltenvektor}$   
und  $m := m$ .  ~~$\cancel{\Phi}_{4 \times 4}$~~

Relevanz: beschreibt Eigenschaften freier  $J=\frac{1}{2}$  Teilchen  
(z.B.  $e^+, \mu^-, \dots$ )

Spm  $\frac{1}{2}$  hat 2 Freiheitsgrade

Dirac-Spinor  $\varphi$  hat 4 Freiheitsgrade = Teilchen + Antiteilchen (!)

Lösungen: später..

### Maxwell-Gl. (Spm 1)

(( Einheiten:  $\mu_0 = \epsilon_0 = 1$ , und natürlich  $c=1$  ))

$$(1) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = g \quad (2) \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$(3) \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (4) \vec{\nabla} \times \vec{B} = \dot{\vec{E}} + \vec{j}$$

Gönnen wir dies und Lorentz-Konstante aufschreiben?

def. Vierer-Ström  $j^\mu := (g, \vec{j})$

Vierer-Potential  $A^\mu := (\phi, \vec{A})$

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \dot{\vec{A}}$$

erfüllen (2), (3) identisch ✓

Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\nu} \quad \text{Maxwell-Gle.}$$

z.B.  $\nu=0 : \partial_0 F^{00} + \partial_i F^{i0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = j^0 = g \stackrel{!}{=} \text{Max(1)} \text{ ist}$

N.B.: das Vieropotential  $A^\mu$  ist will eindeutig bestimmt:

jedes  $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$  (mit beliebigen  $\chi(x)$ )

ist auch eine "Lsg", d.h. gilt dasselbe  $F^{\mu\nu}$ :

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu = F^{\mu\nu} + (\partial^\mu \partial^\nu - \partial^\nu \partial^\mu) \chi = F^{\mu\nu}$$

$\Rightarrow$  "Erfreheit"

die freien Maxwell-Gle.

$\equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 =$  "d'Alambert-Operator"

$$0 = \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\nu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = (\square S_\mu^\nu - \partial^\nu \partial_\mu) A^\mu$$

sind also in Wesentlichen zur KG-Gly äquivalent.

## 2.2 Lösungen der Grundgleichungen

Klem-Gordon (KG)-Gly (5.5.12)

$$0 = (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = (\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2) \phi$$

$\phi(x) = \phi(t, \vec{x}) = ?$  kann i.A. reell oder complex sein

Ansatz (ebene Welle)  $\phi(x) = C \cdot e^{-ikx} = C \cdot e^{-ik^\mu x_\mu} = C \cdot e^{-ik_\mu x^\mu}$

$$\text{aussetzen} \Rightarrow ((-ik_\mu)(-ik^\mu) + m^2) C e^{-ikx} = 0$$

$$\Rightarrow k^0 = \pm \sqrt{k^2 + m^2} =: \pm E_k$$

allg Lsg ist LK ebene Wellen, mit bel. Koeff. C

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int d^3k \left( C_+(\vec{k}) e^{-iE_k t + i\vec{k}\vec{x}} + C_-(\vec{k}) e^{+iE_k t + i\vec{k}\vec{x}} \right) \\ &\quad \left. \int d^3k \left( C'_+(\vec{k}) e^{-iE'_k t + i\vec{k}\vec{x}} + C'_-(\vec{k}) e^{+iE'_k t - i\vec{k}\vec{x}} \right) \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left( a_p e^{-ipx} + b_p^* e^{ipx} \right) \end{aligned}$$

im 2. Schritt:  $\vec{t} \rightarrow -\vec{t}$  am zweiten Term

im 3. Schritt:  $\vec{t} \rightarrow \vec{p}$ ,  $E_{\vec{t}} \rightarrow E_{\vec{p}} =: p^0$

$$\rightarrow p \cdot p = m^2, p \cdot x = E_{\vec{t}} t - \vec{t} \cdot \vec{x}$$

$$C_+(\vec{t}) \rightarrow \frac{a_{\vec{p}}}{\Gamma(2n)^3 2E_{\vec{p}}}, C_-(\vec{t}) \rightarrow \frac{b_{\vec{p}}^*}{\Gamma(2n)^3 2E_{\vec{p}}}$$

wieviele Freiheitsgrade hat diese  $C_\pm$ ?

$a_{\vec{p}}, b_{\vec{p}}^*$  unabhängig voneinander  $\Rightarrow \phi \in \mathbb{C} \Rightarrow 2$  Freiheitsgrade (z.B.  $\pi^\pm$ )

$a_{\vec{p}} = b_{\vec{p}}^*$   $\Rightarrow \phi \in \mathbb{R} \Rightarrow 1$  Freiheitsgrad (z.B.  $\pi^0$ )

Teilcheninterpretation? um Teilchen (Klasse  $m$ , Impuls  $\vec{q}$ )?

$$a_{\vec{p}} \sim \delta(\vec{p} - \vec{q}), \phi(x) \sim e^{-iE_{\vec{q}}t + i\vec{q} \cdot \vec{x}}$$

$$b_{\vec{p}}^* \sim \delta(\vec{p} - \vec{q}), \phi(x) \sim e^{+iE_{\vec{q}}t - i\vec{q} \cdot \vec{x}}$$

$\rightarrow$  KG-Glg enthält reale und neg. E.-Lsg!

$\rightarrow$  Universum wählbar?

• Gölde  $(i\phi^*) (\text{KG}) - (i\phi) (\text{KG})^*$

$$0 = (i\phi^*) (\partial_t^2 - \vec{\nabla}_{\vec{q}}^2 + m^2) \phi - (i\phi) (\partial_t^2 - \vec{\nabla}_{\vec{q}}^2 + m^2) \phi^*$$

$$= \partial_t [i(\phi^* \dot{\phi} - \phi \dot{\phi}^*)] + \vec{\nabla}_{\vec{q}} \cdot [-i(\phi^* \vec{\nabla}_{\vec{q}} \phi - \phi \vec{\nabla}_{\vec{q}} \phi^*)]$$

$$= \partial_t g + \vec{\nabla}_{\vec{q}} \cdot \vec{j} \quad ((\text{Conti: } \partial_t j^a = 0))$$

{   
 L.W.-Stromdichte  
 Wirkender Ladungsdichte

$$g \sim \pm 2E_{\vec{q}}! \quad \text{negative Wahrsch. ?} \quad \begin{matrix} E < 0, g < 0 \\ \text{min} \end{matrix}$$

historessl: Vermessung; Problem: Teilcheninterpretation.

$\rightarrow$  Feynman-Schwinger-Interpretation [s. z.B. Hohen/Parton §3.5]

$$\text{Grundidee } e^{+iEt} = e^{-iE(-t)}$$

Teilchen mit  $E > 0$ , propagiert rückwärts in Zeit

= Antiteilchen, das vorwärts propagiert

$$\xrightarrow[t]{\vec{t}} : \begin{array}{c} \text{Teilchen} \hat{=} \longrightarrow \\ \text{Antiteilchen} \hat{=} \longleftarrow \end{array}$$

## Zweite Quantisierung

Ablehr von der willkür verschiedener Interpretationen

Feld  $\phi(x) \rightarrow$  Operator  $\hat{\phi}(x)$  ( $\hat{\phi}$  = Quantenfeld Theorie)

$$QFT : [\hat{x}, \hat{p}] = i \quad \rightarrow \quad QFT : [\hat{\phi}(t, \vec{x}), \partial_0 \hat{\phi}^+(t, \vec{y})] = i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

diese Vertauschungsrelation wird erfüllt durch

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} \left( \hat{a}_{\vec{p}} e^{-ipx} + \hat{b}_{\vec{p}}^+ e^{ipx} \right)$$

$$(\Rightarrow \hat{\phi}^+ = \hat{a}^+ e^+ + \hat{b}^+ e^-)$$

$$\text{mit } [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{q}}^+] = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) = [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{q}}^+]$$

$$0 = [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{q}}^+] = [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{q}}^+] = [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{q}}^+] = \dots$$

vgl.  
harm. 058.  
S. 9

(( Beweis: s. Übung, Aufgabe 11 ))

$\rightarrow$  QFT-Lag folgt aus klass. Lag durch

$$\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}}^+, \hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}}^+ \rightarrow \hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}}^+, \hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}}^+ \quad (\text{Kreisler + Erzeuger})$$

## Interpretation:

$$\hat{Q} := i \int d^3x (\hat{\phi}^+ \partial_0 \hat{\phi} - \hat{\phi} \partial_0 \hat{\phi}^+) \quad \text{ist erhalten}$$

$$= \dots [\phi \text{ ersetzen, } \int d^3x e^{i\vec{p}\vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p})], [\text{vgl. S. 16; Übung, Aufgabe 12}], [\hat{a}, \hat{b}] = 0 \text{ benutzen}]$$

$$= \int d^3\vec{p} \left( \frac{1}{2} (\hat{a}_{\vec{p}}^+ \hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^+) - \frac{1}{2} (\hat{b}_{\vec{p}}^+ \hat{b}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}}^+) \right)$$

$$= \cancel{\hat{a}^+ \hat{a}} + \hat{a}^+ \hat{a} = \cancel{\hat{b}^+ \hat{b}} + \hat{b}^+ \hat{b}$$

$$= \int d^3\vec{p} (\hat{a}_{\vec{p}}^+ \hat{a}_{\vec{p}} - \hat{b}_{\vec{p}}^+ \hat{b}_{\vec{p}}) \quad \text{ist Differenz von}$$

Besetzungszahl-Op's !

$$\sim \text{Anzahl } (\pi^+) - \text{Anzahl } (\pi^-)$$

$$\sim \text{Ladung} \quad (\text{und nicht Wahrscheinlichkeit} \rightarrow \text{durf. neg. sein!})$$