

## Seminarvortrag Elementarteilchenphysik

# Die Verletzung der CP-Symmetrie

Zweiter Vortrag, Benjamin Jurke\*

(Stand: 20. Mai 2005)

Die Verletzung der CP-Symmetrie ist für das Verständnis der Elementarteilchenphysik von entscheidender Bedeutung, insbesondere zur Erklärung des Materieüberschusses und der Teilchenentstehung im primordialen Universum (Baryogenese). Die Auswirkungen der verletzten CP-Symmetrie auf Zerfallsprozesse liefern in jüngerer Zeit ein wichtiges Auswahlkriterium für Theorien der großen Vereinheitlichung (GUT). Im Rahmen des Standardmodells lässt sich die CP-Verletzung weitestgehend über eine nichttriviale Phasenverschiebung der CKM-Quarkmischungs-Matrix beschreiben, die nach einer kurzen Wiederholung der Quark-Massenerzeugung eingeführt wird. Neben der Untersuchung von  $K$ -,  $D$ - und  $B$ -Mesonen-Zerfällen wird auf Unitaritätsdreiecke der CKM-Matrix eingegangen. Die starke CP-Verletzung und supersymmetrische Erweiterungen werden nur kurz behandelt.

## 1 Das Problem der CP-Verletzung

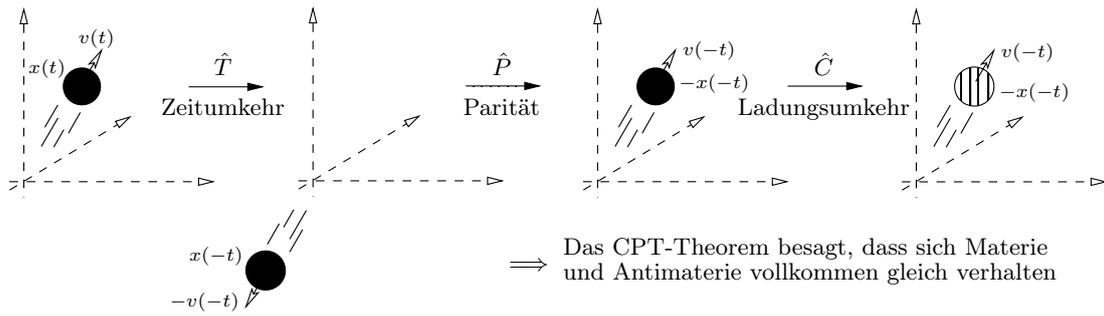
Neben den gewöhnlichen Erhaltungsgrößen wie Energie, Impuls, etc., die nach dem Noether-Theorem zu kontinuierlichen Symmetrien der Lagrange-Dichte gehören, existieren auch diskrete Symmetrien in der Physik. Aus der Raumspiegelung  $\vec{x} \rightarrow \vec{x}' := -\vec{x}$  erhält man die diskrete Symmetrie der **Parität P**. Die Umwandlung  $|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle := |\bar{\psi}\rangle$  eines Teilchens in sein zugehöriges Antiteilchen führt zur **Ladungskonjugation C**, analog ist die **Zeitumkehr T** durch die Transformation  $t \rightarrow t' := -t$  definiert.

Die Hintereinanderschaltung dieser drei Symmetrien führt zum **CPT-Theorem**, nach dem zu jedem physikalischen Vorgang auch der gespiegelte, zeitumgekehrte und durch Austausch von Materie und Antimaterie konstruierte Vorgang denselben Gesetzen folgt (siehe Abbildung 1). Das CPT-Theorem ist ein vorausgesetztes Element aller relativistischen Quantenfeldtheorien, so dass aus einer Verletzung der CP-Symmetrie automatisch eine kompensierende Verletzung der T-Symmetrie aus Sicht der Theorie folgt. Bisher hat sich die CPT-Symmetrie in allen Experimenten als exakt herausgestellt, d.h. CPT ist nicht verletzt.

Während Gravitation und die elektromagnetischen Vorgänge diesen drei Symmetrien gehorchen, ist dies für die starke Wechselwirkung noch nicht eindeutig bekannt - es existieren allerdings bisher keine experimentellen Hinweise für eine Verletzung. 1956 zeigten LEE und YANG die Verletzung der Raumspiegelungssymmetrie im  $\beta$ -Zerfall über die schwache Wechselwirkung: Die Natur scheint dabei die linkshändigen den rechtshändigen Teilchen vorzuziehen und man

---

\*E-Mail: [bjurke@gmx.de](mailto:bjurke@gmx.de); Elementarteilchen-Seminar SS 2005; Leiter: Dr. York Schröder



**Abbildung 1:** Illustration der Anwendung von Parität P, Ladungsumkehr C und Zeitumkehr T in der Zusammenstellung des CPT-Theorems aus Sicht eines außenstehenden Beobachters.

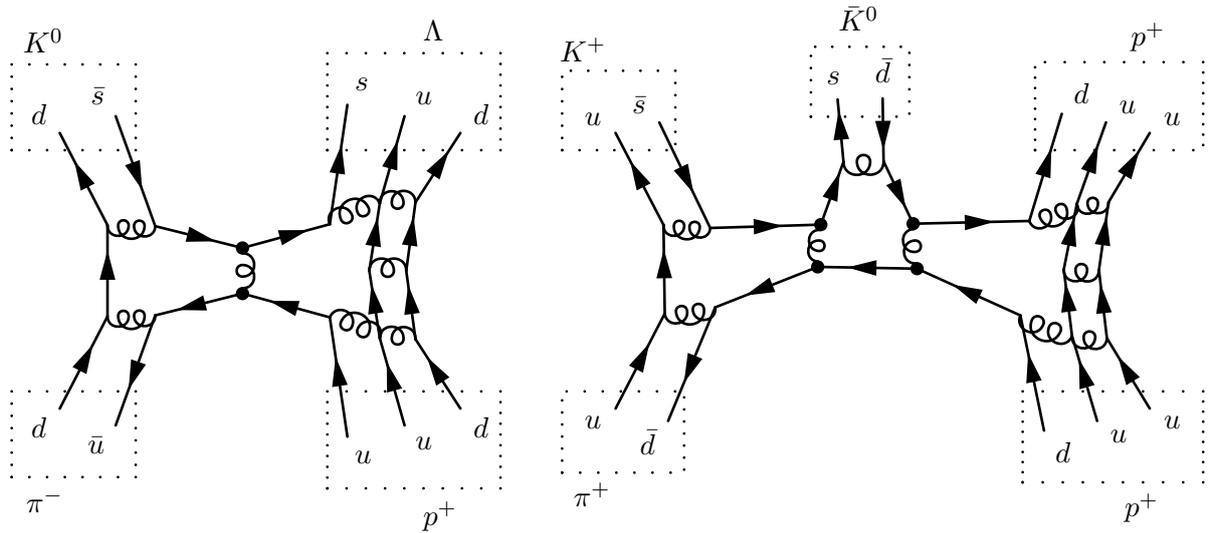
erhält die **P-Verletzung**. Ähnlich entdeckte man, dass unter Einfluss der schwachen Wechselwirkung auch die Ladungsumkehr C und Zeitinversion T verletzt wird. In Tabelle 1 findet sich eine Übersicht von physikalische Größen bzw. Symmetrien und ihrer Erhaltung/Verletzung innerhalb der Wechselwirkungen.

Kombiniert man aber Ladungsumkehr C und Raumspiegelung P so erhält man eine Symmetrie, die aus Sicht der Theorie von der starken und schwachen Wechselwirkung respektiert wird. Doch schon 1964 entdeckten die amerikanischen Physiker CHRISTENSON, CRONIN, FITCH und TURLAY eine winzige Unregelmäßigkeit beim *K*-Mesonen-Zerfall, d.h. eine Verletzung der CP-Symmetrie im Zerfallsprozess, wie später explizit hergeleitet wird - die beiden letzteren der Genannten erhielten für diese Entdeckung 1980 den Nobelpreis. Auf weitere Arten der CP-Verletzung wird in Abschnitt 3 eingegangen.

Bereits in den 60er-Jahren schlug SAKHAROV vor, dass die CP-Verletzung eine entscheidende Rolle in der Entstehungsgeschichte des Universums spielen könnte. Gemäß der Urknalltheorie brachte die primordiale Singularität die gleiche Menge an Teilchen wie auch Antiteilchen hervor, die sich gegenseitig hätten annihilieren sollen. Durch die sogenannte **Baryogenese**, die sich möglicherweise durch die CP-Verletzung erklären lässt, entstand das heute zu beobachtende Ungleichgewicht, in dem nur noch Materie übrig blieb.

Erhaltungsgröße / Symmetrie	stark	el.-magn.	schwach
Energie $E$ , Impuls $\vec{p}$ , Drehimpuls $\vec{l}$	•	•	•
elektrische Ladung $q$ , Leptonen-/Baryonen-Zahl $n_L/n_B$	•	•	•
Strangeness $s$	•	•	×
Charmness (Charm) $c$	•	•	×
Bottomness (Beauty) $b$ , Topness (Truth) $t$	•	•	×
Isospin $I_s$	•	×	×
Parität $\hat{P}$	•	•	×
Ladungskonjugation $\hat{C}$	•	•	×
Zeitumkehr $\hat{T}$	•	•	×
Raum-/Ladungsumkehr-Symmetrie $\hat{C}\hat{P}$	•	•	×
Zeit-/Raum-/Ladungsumkehr-Symmetrie $\hat{C}\hat{P}\hat{T}$	•	•	•

**Tabelle 1:** Übersicht der Erhaltung „•“ bzw. Verletzung „×“ von Symmetrien und physikalischen Größen im Zusammenhang mit den einzelnen Wechselwirkungen.



**Abbildung 2:** Erzeugung neutraler  $K^0$ - und  $\bar{K}^0$ -Mesonen durch die starke Wechselwirkung, wobei nur diejenigen Gluonen mit punktierten Vertices am Erzeugungsprozess beteiligt sind.

## 2 CP-Verletzung in Mesonen-Zerfällen

### 2.1 Eigenschaften der Kaonen

Der Begriff „Meson“ (griech. Mitte) wurde in den 30er Jahren für Teilchen mittlerer Masse (im Vergleich zu leichten Leptonen und schweren Baryonen) eingeführt. Das Kriterium der Masse erwies sich allerdings schnell als unzureichend als sich heraus stellte, dass das erste nachgewiesene Meson eigentlich ein Lepton ist. Zudem ist etwa das Tauon-Lepton (1.777 GeV) wesentlich schwerer als das Proton (938.2 MeV) oder Neutron (939.5 MeV).

Das **positiv geladene Kaon**  $K^+$  wurde 1947 über den Prozess  $\pi^+ + n \rightarrow K^+ + \Lambda$  entdeckt, ihre besondere Bedeutung erlangten die Kaonen aber erst durch die Entdeckung der CP-Verletzung in ihren Zerfallsprozessen. Die Auswirkungen der CP-Verletzung werden explizit an diesem historischen Beispiel der neutralen Kaonen  $K^0$  bzw.  $\bar{K}^0$  gezeigt.

Da dem  $K^0$ -Meson eine Strangeness  $s = +1$  zugeschrieben wird, kann es nicht sein eigenes Antiteilchen sein, so dass es zwei Zustände  $K^0$  und  $\bar{K}^0$  des neutralen  $K$ -Mesons gibt. Die **Erzeugung neutraler Kaonen** findet durch  $\pi^- + p^+ \rightarrow K^0 + \Lambda$  und  $\pi^+ + p^+ \rightarrow K^+ + \bar{K}^0 + p^+$  über die starke Wechselwirkung statt, die zugehörigen Feynman-Diagramme sind in Abbildung 2 zu sehen. Eine bemerkenswerte Eigenschaft ist die **Kaonen-Mischung**  $K^0 \leftrightarrow 2\pi \leftrightarrow \bar{K}^0$  zwischen  $K^0$  und  $\bar{K}^0$ , zumeist über den Zwischenzustand  $2\pi$ . Diese Mischung geschieht durch einen schwachen Prozess zweiter Schleifen-Ordnung, so dass die Übergangsrate sehr klein ist.

### 2.2 Zerfallsprozesse in der Weisskopf-Wigner-Approximation

Empirisch zeigt sich, dass nahezu alle Zerfallsprozesse der Natur in exponentieller zeitlicher Abhängigkeit stattfinden. Trotzdem ist die **Beschreibung eines exponentiellen Zerfallsprozesses** im Rahmen der Quantenmechanik kein triviales Problem. Die Schrödinger-Gleichung



**Abbildung 3:**  $K^0$ - $\bar{K}^0$ -Kaonen-Mischung bzw. -Oszillation durch Einfluß der schwachen Wechselwirkung.

Pionen / $\Lambda$	K-Mesonen	D-Mesonen	B-Mesonen
$\pi^0 = u\bar{u} - d\bar{d}$	$K^0 = d\bar{s}$ $\bar{K}^0 = s\bar{d}$	$D^0 = c\bar{u}$ $\bar{D}^0 = u\bar{c}$	$B^0 = d\bar{b}$ $\bar{B}^0 = b\bar{d}$
$\pi^+ = u\bar{d}$	$K^+ = u\bar{s}$ $K^- = s\bar{u}$	$D^+ = c\bar{d}$ $D^- = d\bar{c}$	$B^+ = u\bar{b}$ $B^- = b\bar{u}$
$\pi^- = d\bar{u}$		$D_s^+ = c\bar{s}$ $D_s^- = s\bar{c}$	$B_c^+ = c\bar{b}$ $B_c^- = b\bar{c}$
$\Lambda = uds$			$B_s^+ = s\bar{b}$ $B_s^- = b\bar{s}$

**Tabelle 2:** Quark-Zusammensetzung der im Weiteren verwendeten Teilchen.

impliziert für einen stationären Zustand durch die formale Lösung

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t}|\psi(0)\rangle = e^{-iE_0t}|\psi(0)\rangle \quad \implies \quad A(t) = \langle\psi^{(0)}|\psi(t)\rangle = \langle\psi^{(0)}|e^{-iE_0t}|\psi(0)\rangle$$

für den exponentiellen Abfall der Amplitude einen komplexwertigen Energie-Eigenwert  $E_0$ . Ein komplexer Eigenwert kann aber nicht zu einem hermiteschen bzw. selbstadjungierten Hamilton-Operator gehören. Die **Weisskopf-Wigner-Approximation** ignoriert dieses Problem, wie im weiteren Verlauf zu sehen ist. Allerdings ist es auch möglich, neutrale Kaonen ohne diese Näherung zu beschreiben (siehe [Azi95]).

Daher ist ein plausibler Ansatz zur Beschreibung eines exponentiellen Zerfalls für Zeiten  $t > 0$  (negative Zeiten würden zu Wahrscheinlichkeitsamplituden größer als Eins führen) durch den Zustandsvektor

$$|\psi(\tau)\rangle := \exp\left(-i\left[m - i\frac{\Gamma}{2}\right]\tau\right)|\psi(0)\rangle = \exp\left(-im - \frac{\Gamma}{2}\tau\right)|\psi(0)\rangle$$

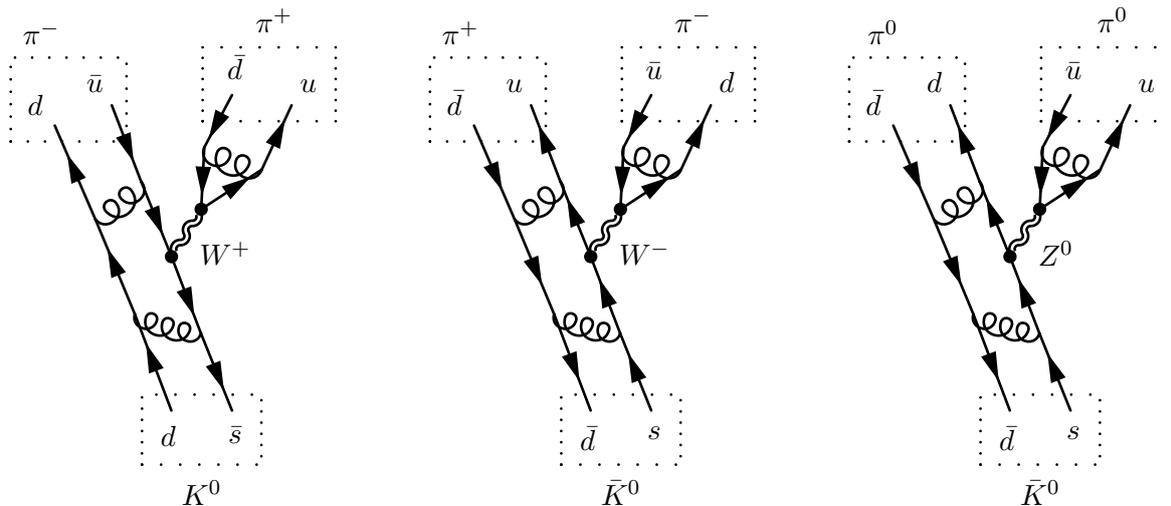
gegeben, wo  $m$  die Masse,  $\Gamma$  die totale Zerfallsrate und  $\tau$  die Eigenzeit ist. Diese zeitliche Evolution führt zu dem gewünschten exponentiellen Abklingen der Wahrscheinlichkeit, da

$$\langle\psi(\tau)|\psi(\tau)\rangle = e^{-\Gamma\tau}$$

gilt. Dieser Zustandsvektor  $|\psi(\tau)\rangle$  genügt dann einer **effektiven Schrödinger-Gleichung**

$$i\frac{\partial}{\partial\tau}|\psi(\tau)\rangle = \left(m - i\frac{\Gamma}{2}\right)|\psi(\tau)\rangle$$

mit der **komplexen Masse**  $m - i\frac{\Gamma}{2}$ .



**Abbildung 4:** Feynman-Diagramme der Zerfallprozesse  $K^0 \rightarrow \pi^-\pi^+$  und  $\bar{K}^0 \rightarrow \pi^-\pi^+$  der neutralen Kaonen durch die schwache Wechselwirkung.

### 2.3 Beschreibung des Kaonen-Zerfallsprozesses

Die **zeitliche Entwicklung der Kaonen-Oszillation** zwischen  $K^0$  und  $\bar{K}^0$  lässt sich durch die Superposition  $|\psi(t)\rangle := \alpha(t)|K^0\rangle + \beta(t)|\bar{K}^0\rangle$  beschreiben. Eine Untersuchung der starken Prozesse der neutralen  $K$ -Mesonen zeigt, dass  $K^0$  und  $\bar{K}^0$  pseudoskalare Teilchen sind. Unter Anwendung des Raumspiegelungsoperators verhalten sie sich also gemäß

$$\hat{P}|K^0\rangle = -|K^0\rangle \quad \text{bzw.} \quad \hat{P}|\bar{K}^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle .$$

Über die Ladungskonjugation wird das neutrale Kaon  $K^0$  in sein Antiteilchen  $\bar{K}^0$  überführt. Durch eine passende Phasenwahl gilt

$$\hat{C}|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle \quad \text{bzw.} \quad \hat{C}|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle ,$$

so dass für die Zusammenschaltung  $\hat{C}\hat{P}$  der beiden Operatoren das Verhalten

$$\hat{C}\hat{P}|K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle \quad \text{bzw.} \quad \hat{C}\hat{P}|\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle$$

folgt. Analog zum Zerfall ohne Oszillations-Mischung der Zustände aus Abschnitt 2.2 ist der **Zerfall des Superpositions-Zustandsvektors** durch die effektive Schrödinger-Gleichung

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} |\psi(\tau)\rangle = \hat{\mathcal{M}} |\psi(\tau)\rangle$$

beschrieben. Wegen der Kaonen-Oszillation ist der Zustandsraum eines ruhenden neutralen  $K$ -Mesons zweidimensional, so dass bezüglich einer Basis der Operator  $\hat{\mathcal{M}}$  einer  $2 \times 2$ -Matrix  $\mathcal{M}$  entspricht. Eine beliebige Matrix lässt sich durch  $X = A + iB$  in einen hermiteschen und antihermiteschen Anteil zerlegen, wobei im konkreten Fall

$$\mathcal{M} = M - \frac{i}{2}\Gamma$$

gilt und beide Matrizen  $M, \Gamma \in \mathbb{M}_{2 \times 2}$  hermitesch sind. Analog zum vorigen Abschnitt 2.2 sei  $M$  die **Massenmatrix** und  $\Gamma$  die **Zerfallsmatrix**.

Die beiden Eigenvektoren von  $\hat{\mathcal{M}}$  seien mit  $|K_S\rangle$  und  $|K_L\rangle$  bezeichnet, normiert und von der Phase so gewählt, dass  $\langle K_S|K_L\rangle = \langle K_S|K_L\rangle^* \geq 0$  erfüllt ist. Da  $\hat{\mathcal{M}}$  nicht hermitesch ist, sind die Eigenvektoren im Allgemeinen nicht orthogonal zueinander und die Eigenwerte  $M_S$  bzw.  $M_L$  nicht reell, es wird die Zerlegung

$$M_S = m_S - \frac{i}{2}\Gamma_S \quad \text{und} \quad M_L = m_L - \frac{i}{2}\Gamma_L$$

gewählt, wobei  $m_S, m_L, \Gamma_S, \Gamma_L \in \mathbb{R}$  und  $\Gamma_S \geq \Gamma_L$  sein soll - die Indizierung der Objekte bezieht sich also auf die **Kurz-/Langlebigkeit des Zustands**, die durch die Zerfallsrate bestimmt ist.

Die Ausgangs-Superposition dieser unterschiedlich rasch zerfallenden Zustände sei nun durch zwei Konstanten  $c_S$  und  $c_L$  gegeben, so dass

$$|\psi(0)\rangle = c_S|K_S\rangle + c_L|K_L\rangle$$

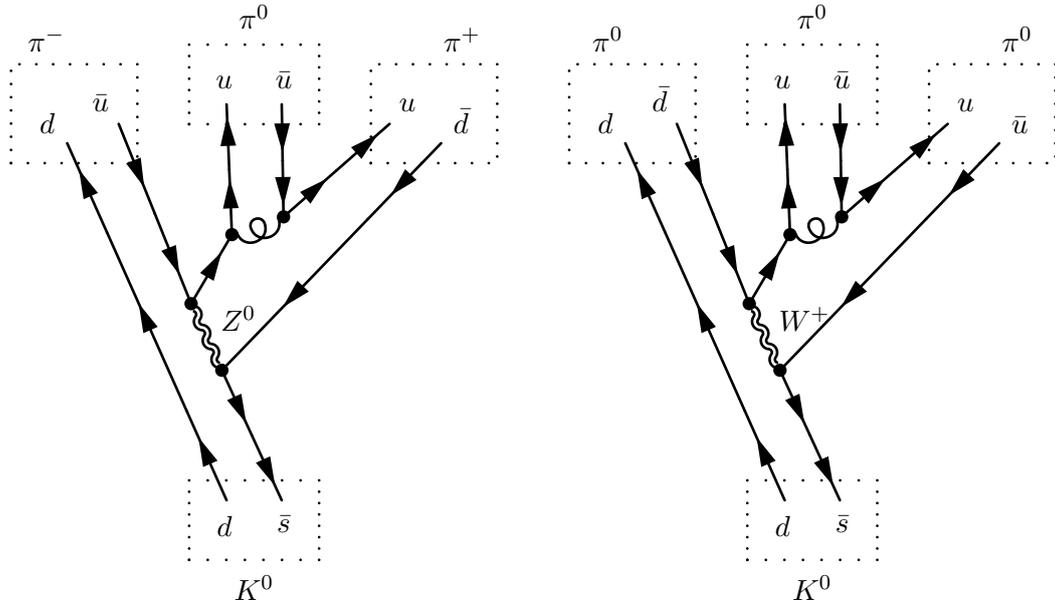
gilt. Die Zeitentwicklung dieses Überlagerungszustandes ist dann völlig analog zum Einzel-Zustands-System durch

$$|\psi(\tau)\rangle = \exp\left(-i \left[ m_S - \frac{i}{2}\Gamma_S \right] \tau\right) c_S|K_S\rangle + \exp\left(-i \left[ m_L - \frac{i}{2}\Gamma_L \right] \tau\right) c_L|K_L\rangle$$

gegeben, so dass die **Gesamtwahrscheinlichkeit ein nicht zerfallenes neutrales Kaon anzutreffen** durch

$$\langle \psi(\tau) | \psi(\tau) \rangle = |c_S|^2 e^{-\Gamma_S \tau} + |c_L|^2 e^{-\Gamma_L \tau} + 2\Re \left[ c_S^* c_L \langle K_S | K_L \rangle e^{-i(m_L - m_S)\tau} \right] e^{-(\Gamma_S + \Gamma_L)\tau/2}$$

gegeben ist.



**Abbildung 5:** Drei-Pionen-Zerfallprozesse  $K^0 \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^0$  und  $K^0 \rightarrow 3\pi^0 = \pi^0 \pi^0 \pi^0$  der neutralen Kaonen durch die schwache und starke Wechselwirkung.

## 2.4 Einfluss der CP-Invarianz

Um nun den Wirkung der CP-Invarianz bzw. ihre Verletzung zu sehen, betrachte man die **Eigenzustände des  $\hat{C}\hat{P}$ -Operators**, die durch

$$\begin{aligned} |K_1^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) & \hat{C}\hat{P}|K_1^0\rangle &= |K_1^0\rangle \\ |K_2^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) & \hat{C}\hat{P}|K_2^0\rangle &= -|K_2^0\rangle \end{aligned}$$

gegeben sind und orthogonal aufeinander stehen (vgl.  $\hat{C}\hat{P}$ -Verhalten von  $|K^0\rangle$  und  $|\bar{K}^0\rangle$  in Abschnitt 2.3). Unter Voraussetzung der CP-Invarianz kann die Matrix  $\mathcal{M}$  keine Übergänge zwischen  $|K_1^0\rangle$  und  $|K_2^0\rangle$  bewirken, so dass die **CP-Eigenzustände zugleich auch Eigenzustände von  $\mathcal{M}$**  sind und deshalb ein exponentielles Zerfallsverhalten beschreiben. Experimentell ist bekannt, dass das kurzlebige neutrale  $K$ -Meson  $|K_S\rangle$  durch die Prozesse

$$K_S \rightarrow \pi^+ \pi^- \quad \text{und} \quad K_S \rightarrow \pi^0 \pi^0$$

hadronisch<sup>1</sup> in zwei Pionen zerfällt, während das langlebige Kaon  $|K_L\rangle$  stattdessen zerfällt in

$$K_L \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0 \quad \text{bzw.} \quad K_L \rightarrow 3\pi^0 = \pi^0 \pi^0 \pi^0 .$$

Da die neutralen  $K$ -Mesonen den Spin 0 haben,<sup>2</sup> müssen die zwei Pionen des Endprodukts aufgrund der Drehimpulserhaltung ebenfalls den Drehimpuls  $l = 0$  haben. Unter dem Paritätsoperator - und damit auch dem  $\hat{C}\hat{P}$ -Operator - hat der kurzlebige Zustand des Zwei-Pionen-Zerfalls daher den Eigenwert  $+1$ . Somit folgt  $|K_S\rangle = |K_1^0\rangle$  und analog  $|K_L\rangle = |K_2^0\rangle$  unter CP-Invarianz. Da der langlebige Zustand einen von  $+1$  verschiedenen Eigenwert hat, kann er deshalb nicht in zwei Pionen zerfallen.

Die **CP-Verletzung** äußert sich aber in der dazu widersprüchlichen Entdeckung, dass auch  $K_L$  in zwei Pionen zerfällt, wenn auch nur in einem sehr geringen Anteil.

<sup>1</sup>Die Bezeichnung **hadronischer Zerfall** kennzeichnet in diesem Fall, dass noch weitere Zerfallsarten des neutralen Kaons existieren. So gibt es beispielsweise **semileptonische Zerfälle** wie  $K^0 \rightarrow \pi^\pm e^\mp \nu_e, \pi^\pm \mu^\mp \nu_\mu$ . Für eine vollständige Liste des Zerfallsarten siehe PDG.

<sup>2</sup>Alle Mesonen haben ganzzahlige Spins und sind deshalb hadronische Bosonen der starken Wechselwirkung.

## 2.5 Beschreibung der CP-Verletzung

Um nun den Einfluss der CP-Verletzung in die obigen Überlegungen einzubinden, müssen die kurz- und langlebigen Zustände  $|K_S\rangle$  und  $|K_L\rangle$  so definiert werden, dass sie **Anteile beider  $\hat{C}\hat{P}$ -Eigenzustände  $|K_1^0\rangle$  und  $|K_2^0\rangle$**  enthalten. Dies lässt sich durch

$$|K_L\rangle := \frac{|K_2^0\rangle + \varepsilon_K |K_1^0\rangle}{1 + |\varepsilon_K|^2} \quad \text{und} \quad |K_S\rangle := \frac{|K_1^0\rangle + \varepsilon_K |K_2^0\rangle}{1 + |\varepsilon_K|^2}$$

erreichen, wobei durch die Orthogonalität der  $\hat{C}\hat{P}$ -Eigenzustände direkt

$$\frac{\langle K_1^0 | K_L \rangle}{\langle K_1^0 | K_S \rangle} = \frac{\varepsilon_K \langle K_1^0 | K_1^0 \rangle}{\langle K_1^0 | K_1^0 \rangle} = \varepsilon_K$$

für das Verhältnis des Übergangs von lang- und kurzlebigen neutralen  $K$ -Mesonen in den Zwei-Pionen-Zerfalls- $\hat{C}\hat{P}$ -Eigenzustand  $|K_1^0\rangle$  folgt. Diesen Wert  $\varepsilon_K$  kann man experimentell durch Amplituden-Messung des **Zerfallsverhältnisses**

$$\varepsilon_K := \frac{A(|K_L\rangle \rightarrow |\pi\pi\rangle_{l=0})}{A(|K_S\rangle \rightarrow |\pi\pi\rangle_{l=0})}$$

bestimmen. Für eine tatsächliche CP-Invarianz müsste der Wert  $\varepsilon_K = 0$  oder  $\infty$  sein, allerdings zeigt sich (wie auch in Abbildung 7 eingezeichnet) dass  $\varepsilon_K = 2.282 \pm 0.017 \cdot 10^{-3}$  beträgt.

## 2.6 CP-Verletzung in $D$ - und $B$ -Mesonen-Zerfällen

Ein Großteil der vorigen Ausführungen lässt sich völlig analog auf den Zerfall von schweren  $D$ - und  $B$ -Mesonen übertragen. Insbesondere dem Zerfall der  $B$ -Mesonen wird in jüngerer Zeit große Aufmerksamkeit zuteil, da die deutlich größere Masse dieser Teilchen eine genauere Messung der CP-Verletzung erlaubt. Die interessantesten beiden Zerfallsprozesse sind dabei

$$B^0 \rightarrow J/\Psi K_S \quad \text{und} \quad \bar{B}^0 \rightarrow J/\Psi K_S .$$

Der experimentelle Vorteil dieser beiden Zerfälle gegenüber den Kaonen-Zerfällen rührt von der Art der Zerfallsprozesse her. Der weitere Zerfall der instabilen Zerfallsprodukte  $J/\Psi = c\bar{c}$  und  $K_S$  erlaubt vom theoretischen Standpunkt einen sehr genauen Rückschluss auf den ursprünglichen  $\hat{C}\hat{P}$ -Eigenzustand des  $B$ -Mesons.

Zur Zeit laufen zwei parallele Experimente zur Erforschung der CP-Verletzung der  $B$ -Mesonen: Das BaBar am amerikanischen SLAC und Belle am KEK in Japan. Eine große Herausforderung ist dabei die Bereitstellung einer leistungsfähigen  $B$ -Mesonen-Quelle, da die beiden oben genannten Zerfällen nur mit einer Rate von  $\Gamma(B^0 \rightarrow J/\Psi K_S) = 8.7 \cdot 10^{-4}$  auftreten.

## 3 Klassifikation der CP-Verletzung

### 3.1 Direkte und indirekte CP-Verletzung

Man unterscheidet drei Arten der CP-Verletzung: Zuerst ist die **indirekte CP-Verletzung** durch Mischung  $A \leftrightarrow X \leftrightarrow \bar{A}$  zu nennen, die im vorigen Abschnitt anhand des schwachen Kaonen-Zerfalls ausführlich beschrieben wurde. Diese wird im Falle der Kaonen üblicherweise

durch den Parameter  $\varepsilon_K$  beschrieben, der oben eingeführt wurde. Eine allgemeine Bedingung für die indirekte CP-Verletzung ergibt sich durch

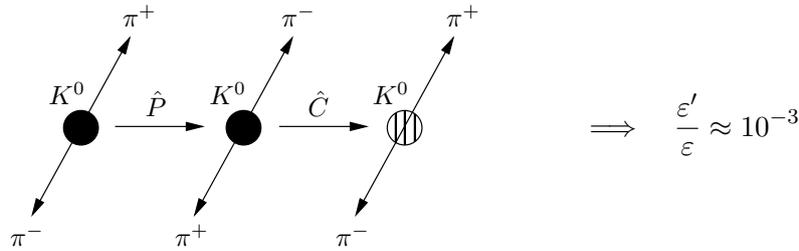
$$\left| \frac{q}{p} \right| \neq 1 \quad \text{für} \quad \left| \frac{q}{p} \right|^2 = \left| \frac{M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*}{M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}} \right|$$

wenn  $M$  die Massenmatrix und  $\Gamma$  die Zerfallsmatrix analog zu Abschnitt 2.3 sind.

Die **direkte CP-Verletzung** wird dagegen durch eine Verletzung der CP-Symmetrie im Zerfallsprozess selbst verursacht, welche eigentlich allgemein die Gleichheit der Zerfallsraten  $\Gamma(A \rightarrow B) = \Gamma(\bar{A} \rightarrow \bar{B})$  von Teilchen und Antiteilchen formuliert (vgl. Abschnitt 1). Ist  $|f\rangle$  der Zustand der Endprodukte und  $|P\rangle$  der Zustand der pseudoskalaren zerfallenden Teilchen, so lautet die allgemeine Bedingung der direkten CP-Verletzung

$$\left| \frac{\bar{A}}{A} \right| \neq 1 \quad \text{für} \quad \left| \frac{\bar{A}}{A} \right| = \left| \frac{\langle \bar{f} | \hat{H} | \bar{P} \rangle}{\langle f | \hat{H} | P \rangle} \right|.$$

Im Rahmen der direkten CP-Verletzung der Kaonen entspricht der Quotient  $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$  dieser Größe.



**Abbildung 6:** Darstellung der direkten CP-Verletzung beim Kaonen-Zerfall.

Schließlich gibt es noch die **CP-Verletzung durch Interferenz von Mischung und Zerfall**. Dazu betrachtet man den Zerfall von neutralen Mesonen in  $\hat{C}\hat{P}$ -Eigenzustände, der durch die Übergangsamplituden  $A = \langle f_{\text{CP}} | \hat{H} | P^0 \rangle$  und  $A^* = \langle f_{\text{CP}} | \hat{H} | \bar{P}^0 \rangle$  beschrieben wird. Mit weiteren Überlegungen (auf die aber nicht näher eingegangen werden soll) lässt sich diese Form der CP-Verletzung durch die Bedingung

$$\lambda \neq 1 \quad \text{für} \quad \lambda = \frac{q}{p} \cdot \frac{\bar{A}}{A}$$

charakterisieren. Diese Form der CP-Verletzung ist insbesondere für die Untersuchung der  $B$ -Mesonen wichtig, man führt dort zur Quantifizierung die folgende Größe ein:

$$a_{J/\Psi K_S} = \frac{\Gamma(B^0 \rightarrow J/\Psi K_S) - \Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow J/\Psi K_S)}{\Gamma(B^0 \rightarrow J/\Psi K_S) + \Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow J/\Psi K_S)}.$$

Für den Zerfall der neutralen Kaonen wurden alle drei Arten der CP-Verletzung bereits experimentell beobachtet, die CP-Verletzung durch Interferenz konnte inzwischen auch für den Zerfall der  $B$ -Mesonen nachgewiesen werden. BaBar und Belle versuchen unter anderem die anderen beiden Arten der CP-Verletzung nachzuweisen.

## 3.2 Starke CP-Verletzung

Die CP-Verletzung findet sich aber auch in anderen Teilen des Standardmodells. In der nicht-perturbativen Quantenchromodynamik (QCD) enthält die Lagrange-Dichte einen Term

$$\mathcal{L}_\theta = \frac{\theta_{\text{QCD}}}{32\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu a} F^{\rho\sigma a} = \frac{\theta_{\text{QCD}}}{32\pi^2} \tilde{G}^a \tilde{G}^a ,$$

welcher die CP-Invarianz verletzt, indem er zu einem starken elektrischen Dipolmoment des Neutrons führt. Zwar ist es nicht möglich den Wert des Faktors  $\theta_{\text{QCD}}$  zu berechnen, allerdings gibt es mehrere indirekte Hinweise darauf, dass  $\theta_{\text{QCD}} \approx 10^0$  sein sollte. Experimentell gelangt man allerdings zu der Eingrenzung  $\theta_{\text{QCD}} \leq 10^{-10}$ . Das Problem der Beschreibung dieser gewaltigen Diskrepanz zwischen Experiment und Theorie wird **starke CP-Verletzung** genannt.

Mögliche Erklärungen werden durch die Einführung der spontan gebrochenen Peccei-Quinn-Symmetrie (analog zum Higgs-Mechanismus) oder den Nelson-Barr-Mechanismus geliefert - dies sprengt aber den Rahmen dieser Ausführungen bei weitem. Weitere Informationen und vertiefende Literaturhinweise finden sich beispielsweise in [Lei93].

## 3.3 CP-Verletzung in der Supersymmetrie

Von supersymmetrischen Erweiterungen des Standardmodells, welche allgemein die Mischung von Fermionen und Bosonen einführen, erhofft man sich ein geschlosseneres Bild der CP-Verletzung. Während diese Vereinigung der fundamentalen Teilchenarten in vielen Fällen drastische Vereinfachungen liefert, führt die Supersymmetrie aber auch zu Problemen wie Baryonen- und Leptonenzahl-Verletzung. Einige dieser Probleme lassen sich durch Einführung weiterer Symmetrien lösen. In dem man zur CKM-Matrix ähnliche Ansätze auf die Lagrange-Dichte der minimalen supersymmetrischen Lagrange-Dichte anwendet, erhält man außerdem **43 zusätzliche CP-verletzende Phasen**. Supersymmetrische Modelle liefern also eine große theoretische Freiheit zur CP-Beschreibung. Für Details und weiterführendes Material siehe [Nir01].

# 4 Die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix

## 4.1 Yukawa-Wechselwirkungen im Standardmodell

Im Rahmen des Standardmodells soll nun durch den Kobayashi-Maskawa-Mechanismus eine allgemeine **Beschreibung der CP-Verletzung im Quarksektor** geliefert werden. Es wird mit einer kurzen Wiederholung des Higgs-Mechanismus im elektroschwachen Glashow-Weinberg-Salam-Modell begonnen. Da im Folgenden die Quark-Mischung der einzelnen Familien von Bedeutung ist, werden die **Wechselwirkungs-Zustände** mit einem Strich gekennzeichnet:

1. Familie	2. Familie	3. Familie		<u>Symmetrie:</u>
$Q'_{1L} = \begin{pmatrix} u'_L \\ d'_L \end{pmatrix}$	$Q'_{2L} = \begin{pmatrix} c'_L \\ s'_L \end{pmatrix}$	$Q'_{3L} = \begin{pmatrix} t'_L \\ b'_L \end{pmatrix}$	}	$SU(2)_L \times U(1)_Y$
$u'_R$	$c'_R$	$t'_R$	}	$U(1)_Y$
$d'_R$	$s'_R$	$b'_R$	}	
				$U(1)_Y$

Die **Lagrange-Dichte des Standardmodells** lässt sich in der einfachsten Formulierung durch

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_{\text{Kinetik}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$$

in drei Teile zerlegen. Um die Renormierbarkeitsprobleme direkter Massenterme in der Lagrange-Dichte zu lösen, wird die Massenerzeugung mittels des **skalaren Higgs-Dubletts**

$$\Phi(x) := \begin{pmatrix} \phi^\dagger(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{passende SU(2)-Eichung}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \sigma(x) \end{pmatrix}$$

durch spontane Brechung der  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Eichsymmetrie in eine  $SU(3)_C \times U(1)_{EM}$ -Symmetrie über das Higgs-Potential  $\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$  bewirkt. Dabei ist  $v$  der **Vakuumerwartungswert des Higgs-Felds** vor der Symmetriebrechung, der auch in der analogen Eichung des **konjugierten Higgs-Felds**

$$\tilde{\Phi}(x) := -i\sigma_2 \Phi^*(x) = \begin{pmatrix} (\phi^0(x))^* \\ -(\phi^\dagger(x))^* \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Eichung von } \Phi} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + \sigma(x) \\ 0 \end{pmatrix},$$

auftaucht. Die eigentliche Zuordnung von Massen zu den sechs Quarks (und analog auch zu den sechs Leptonen) findet im **Lagrange-Teil der Yukawa-Wechselwirkungen**

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = \sum_{i,j=1}^3 \left[ \underbrace{C_{ij}^u \overline{Q'_{iL}} \tilde{\Phi} u'_{jR}}_{\substack{\text{„up“-Quark-Ww. der} \\ j. \text{ Familie mit Quarks} \\ \text{der } i. \text{ Familie}}} + \underbrace{C_{ij}^d \overline{Q'_{iL}} \Phi d'_{jR}}_{\substack{\text{„down“-Quark-Ww. der} \\ j. \text{ Familie mit Quarks} \\ \text{der } i. \text{ Familie}}} + \text{h.c.} \right]$$

statt. Dieser Term wird später für die CP-Verletzung verantwortlich sein.

## 4.2 Quark-Massen-Eigenzustände und die CKM-Matrix

Setzt man nun die beiden Higgs-Quantenfeld-Operatoren  $\Phi$  und  $\tilde{\Phi}$  in der genannten Eichung ein, so spaltet sich von der Yukawa-Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = \sum_{i,j=1}^3 \underbrace{\frac{v}{\sqrt{2}} [C_{ij}^u \overline{u'_{iL}} u'_{jR} + C_{ij}^d \overline{d'_{iL}} d'_{jR} + \text{h.c.}]}_{\mathcal{L}_{\text{Quark-Massen}}} + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} [C_{ij}^u \overline{u'_{iL}} u'_{jR} + C_{ij}^d \overline{d'_{iL}} d'_{jR} + \text{h.c.}]$$

der **Massenterm**  $\mathcal{L}_{\text{Quark-Massen}}$  ab, der an den Vakuumerwartungswert  $v$  gebunden ist. Per Definition entsprechen die **Massen-Eigenzustände** der Quarks derjenigen Basis, in der die Koeffizientenmatrizen  $C^u := [C_{ij}^u]$  und  $C^d := [C_{ij}^d]$  diagonal mit positiven Eigenwerten bzw. Diagonaleinträgen sind. Über eine bi-unitäre Transformation mit jeweils zwei  $U(3)$ -Matrizen folgt

$$\begin{aligned} V_{uL}^\dagger C^u V_{uR} &= M^u := \text{diag}(m_u, m_c, m_t) \quad \text{und} \\ V_{dL}^\dagger C^d V_{dR} &= M^d := \text{diag}(m_d, m_s, m_b), \end{aligned}$$

so dass die Diagonalmatrizen  $M^u$  und  $M^d$  die **Quark-Ruhmassen** enthalten. Die (ungestrichenen) Massen-Eigenzustände sind mit den (gestrichenen) Wechselwirkungs-Zuständen durch

$$q_{iL} = (V_{qL})_{ij} q'_{jL} \quad \text{und} \quad q_{iR} = (V_{qR})_{ij} q'_{jR} \quad \text{für } q = u, d \quad (1)$$

verknüpft und für den Yukawa-Lagrange-Term folgt in der Massen-Darstellung

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = M_{ii}^u \overline{u_{iL}} u_{iR} + M_{ii}^d \overline{d_{iL}} d_{iR} + \text{h.c.}$$

Bezüglich der Massen-Basis nimmt der positiv geladene Strom der schwachen Wechselwirkung  $J_+^\mu = \overline{Q'_{iL}} \gamma^\mu \tau^+ Q'_{iL}$  mit  $\tau^\pm := \frac{1}{2}(\sigma^1 \pm i\sigma^2)$  die Form

$$\begin{aligned} J_+^\mu &= \overline{Q'_{iL}} \frac{\gamma^\mu}{2} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right] Q'_{iL} = \overline{Q'_{iL}} \begin{pmatrix} 0 & \gamma^\mu \\ \gamma^\mu & 0 \end{pmatrix} Q'_{iL} = \overline{u'_{iL}} \gamma^\mu d'_{iL} \\ &= [\overline{u_{iL}} (V_{uL})_{ij}] \gamma^\mu [(V_{dL}^\dagger)_{jk} d_{kL}] = \overline{u_{iL}} \gamma^\mu (V_{uL} V_{dL}^\dagger)_{ij} d_{jL} \end{aligned}$$

an, so dass der kinetische Lagrange-Teil der Wechselwirkung zwischen den Quarks und  $SU(2)_L$ -Eichbosonen  $W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp W_\mu^2)$  zu

$$\mathcal{L}_{W^\pm/\text{Quarks}} = -\frac{g_w}{\sqrt{2}} \overline{u_{iL}} \gamma^\mu (V_{uL} V_{dL}^\dagger)_{ij} d_{jL} W_\mu^+ + \text{h. c.}$$

wird. Das Matrizenprodukt in den letzten beiden Gleichungen wird als **Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Quarkmischungs-Matrix**

$$V_{\text{CKM}} := V_{uL} V_{dL}^\dagger = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \in U(3)$$

definiert, deren Komponenten entsprechend der oberen Matrix gegeben sind (sofern die up- und down-Quarks nach ihren Massen geordnet werden). Durch sie werden die schwachen Wechselwirkungs-Eigenzustände mit den Massen-Eigenzuständen gemäß

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}_w = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_{\text{Massen}}$$

verknüpft. Außerdem ist die Übergangswahrscheinlichkeit eines Quarks  $q_i$  in ein Quark  $q_j$  proportional zu  $|V_{q_i q_j}|^2$ .

### 4.3 Parametrisierungen der CKM-Matrix

Gesucht ist nun eine sinnvolle Darstellung bzw. Parametrisierung der CKM-Matrix. Da es sich um eine unitäre  $3 \times 3$ -Matrix handelt, gibt es neun reelle Parameter, die sich mathematisch in drei Rotationswinkel und sechs Phasenparameter aufteilen lassen. Allerdings fallen aus physikalischer Sicht wegen der  $U(1)_Y$ -Symmetrie der einzelnen Quarkfelder fünf dieser Phasenparameter weg, so dass schließlich nur **vier physikalische Parameter** (drei Drehwinkel und ein Phasenfaktor) übrig bleiben. Später wird gezeigt, dass nichttriviale Werte dieses Phasenfaktors zur CP-Verletzung führen.

Die vier Parametrisierungsgrößen führen zu neun verschiedenen Permutationen der Multiplikationsreihenfolge der drei Drehmatrizen  $R_{12}(\theta)$ ,  $R_{23}(\varphi)$ ,  $R_{13}(\vartheta)$  und der Phasenmatrix  $P(\delta_{\text{KM}})$ , diese sind explizit in [FrX00] aufgelistet. Üblicherweise wählt man

$$\begin{aligned} V_{\text{CKM}} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}}_{\text{Rotation in 2-3-Ebene}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \vartheta & 0 & \sin \vartheta \cdot e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \vartheta \cdot e^{-i\delta} & 0 & \cos \vartheta \end{pmatrix}}_{\text{Rotation in 1-3-Ebene und Phasenfaktor } \delta_{\text{KM}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Rotation in 1-2-Ebene}} \\ &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{\text{KM}}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{\text{KM}}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{\text{KM}}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{\text{KM}}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{\text{KM}}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

als **Standardparametrisierung der CKM-Matrix**, wobei  $c_{ij} := \cos \phi_{ij}$  und  $s_{ij} := \sin \phi_{ij}$  gilt. Es gibt eine weitere wichtige Parametrisierung nach Wolfenstein in der Form

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \bar{\rho} - i\bar{\eta}) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \lambda &= \sin \theta \\ A\lambda^2 &= \sin \varphi \\ \sin \vartheta e^{-i\delta} &= A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ (\bar{\rho}, \bar{\eta}) &:= (\rho, \eta)(1 - \frac{\lambda^2}{2}) \end{aligned}$$

In dieser **Wolfenstein-Parametrisierung** sind  $\lambda$ ,  $A$ ,  $\rho$  und  $\eta$  die vier freien Parameter, wobei  $\eta$  in dieser Darstellung die CP-verletzende Phase angibt. Der Vorteil dieser Parametrisierung ergibt sich aus der geometrischen Interpretation der Parameter, die später in Abschnitt 5.2 näher betrachtet wird.

## 5 Theoretische Beschreibung der CP-Verletzung

### 5.1 CKM-Bedingungen für die CP-Verletzung

Als nächstes wird eine Bedingung für die CKM-Matrix hergeleitet, mittels der sich die CP-Verletzung dann im **Kobayashi-Maskawa-Mechanismus** manifestiert. Die weitere Betrachtung beschränkt sich dabei ausschließlich auf den Quark-Bereich der Lagrange-Dichte. Für eine Beschreibung der CP-Verletzung im Leptonensektor kann allerdings durch Einführung der **Maki-Nakagawa-Saki-Leptonen-Mischmatrix**  $V_{\text{MNS}}$  analog vorgegangen werden - durch Übergänge in den Neutrino-Oszillationen erhält man aber drei physikalische Phasenfaktoren, was die Situation verkompliziert (für Details siehe [Nir01] oder [FrX00]).

Ist  $q$  ein beliebiges Quark-Quantenfeld, dann ist die Anwendung der  $\hat{P}$ - und  $\hat{C}$ -Operatoren von Parität und Ladungsumkehr durch

$$\begin{aligned} \hat{P}q(x) &= \gamma^0 q(x') \quad \text{mit } x' := (t, -\vec{x}) \quad \text{und} \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{C}q(x) &= i\gamma^2 \gamma^0 \bar{q}^t(x) \end{aligned}$$

gegeben, wobei  $\bar{q}$  das Quantenfeld zum zugehörigen Antiquark von  $q$  ist. Durch eine zusätzliche globale Phase  $\phi_q$  der allgemeinen  $U(1)$ -Symmetrie folgt

$$\hat{C}\hat{P}q(x) = ie^{i\phi_q} \gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 \bar{q}^t(x'),$$

wobei sich der Dirac-adjungierte Spinor<sup>3</sup> des Antiteilchens verhält gemäß

$$\hat{C}\hat{P}\overline{q(x)} = \overline{\hat{C}\hat{P}q(x)} = \overline{ie^{i\phi_q} \gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 \bar{q}^t(x')} = ie^{-i\phi_q} q^t(x') \gamma^2.$$

Wird der  $\hat{C}\hat{P}$ -Operator nun auf die geladenen Ströme  $J_{\pm}^{\mu}$  der schwachen Wechselwirkung angewandt, so folgt mit der zuvor hergeleiteten Gleichung (1) von Seite 10 über den Wechsel

<sup>3</sup>Dabei sei an die Definition  $\bar{u} := u^{\dagger} \gamma^0 = u^{\dagger} \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & -\text{Id} \end{pmatrix}$  eines Dirac-adjungierten Spinors erinnert, der zugleich das zu einem Teilchenfeld gehörige Antiteilchen darstellt.

zwischen Massen- und Wechselwirkungs-Eigenzuständen in Matrixdarstellung

$$\begin{aligned}
\hat{C}\hat{P}J_+^\mu(x) &= \hat{C}\hat{P} \left[ \left( \overline{u_L(x)}, \overline{c_L(x)}, \overline{t_L(x)} \right) \gamma^\mu V_{\text{CKM}} \begin{pmatrix} d_L(x) \\ s_L(x) \\ b_L(x) \end{pmatrix} \right] \\
&= - \left( e^{-i\phi_u} u_L^\dagger(x'), e^{-i\phi_c} c_L^\dagger(x'), e^{-i\phi_t} t_L^\dagger(x') \right) \gamma^2 \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 V_{\text{CKM}} \begin{pmatrix} e^{i\phi_d} \overline{d_L^\dagger(x')} \\ e^{i\phi_s} \overline{s_L^\dagger(x')} \\ e^{i\phi_b} \overline{b_L^\dagger(x')} \end{pmatrix} \\
&= - \left( e^{i\phi_d} \overline{d_L(x')}, e^{i\phi_s} \overline{s_L(x')}, e^{i\phi_b} \overline{b_L(x')} \right) \gamma_\mu V_{\text{CKM}}^\dagger \begin{pmatrix} e^{-i\phi_u} u_L(x') \\ e^{-i\phi_c} c_L(x') \\ e^{-i\phi_t} t_L(x') \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

wobei die Identität  $(\gamma^2 \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^2 \gamma^0)^\dagger = (-\gamma^2 \gamma^\mu \gamma^2)^\dagger = -(\gamma^\mu)^\dagger = (\gamma^\mu)^\dagger = \eta_{\mu\nu} \gamma^\nu = \gamma_\mu$  der  $4 \times 4$ -Dirac-Matrizen  $\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$  verwendet wurde. Wenn man von den Phasenfaktoren absieht, hat dieses Ergebnis große Ähnlichkeit mit dem hermitesch konjugierten Strom

$$\begin{aligned}
J_-^\mu(x') &= [J_+^\mu(x')]^\dagger = \left[ \left( \overline{u_L(x')}, \overline{c_L(x')}, \overline{t_L(x')} \right) \gamma^\mu V_{\text{CKM}} \begin{pmatrix} d_L(x') \\ s_L(x') \\ b_L(x') \end{pmatrix} \right]^\dagger \\
&= \left( \overline{d_L(x')}, \overline{s_L(x')}, \overline{b_L(x')} \right) \gamma_\mu V_{\text{CKM}}^\dagger \begin{pmatrix} u_L(x') \\ c_L(x') \\ t_L(x') \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wenn nun die Anwendung des  $\hat{C}\hat{P}$ -Operators auf  $J_+^\mu$  die Lagrange-Dichte invariant lassen soll, so muss auch das transformierte Objekt in der Lagrange-Dichte vorkommen, so dass sich die beiden Objekte unter  $\hat{C}\hat{P}$ -Anwendung austauschen. Wie die Ähnlichkeit schon andeutet, ist der hermitesch konjugierte Strom  $J_-^\mu$  das einzige in Frage kommende (physikalisch sinnvolle) Objekt, so dass vom  $\hat{C}\hat{P}$ -Operator das Transformationsverhalten

$$\hat{C}\hat{P}J_+^\mu(x) = -e^{i\chi} J_-^\mu(x')$$

für eine beliebige Phase  $\chi$  gefordert wird. Durch Vergleich mit dem oben berechneten Ergebnis von  $\hat{C}\hat{P}J_+^\mu(x)$  folgt die Gleichung

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} e^{i\phi_d} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_s} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_b} \end{pmatrix} V_{\text{CKM}}^\dagger \begin{pmatrix} e^{-i\phi_u} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_c} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\phi_t} \end{pmatrix} &= e^{i\chi} V_{\text{CKM}}^\dagger \\
\iff \begin{pmatrix} e^{-i\phi_u} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_c} & 0 \\ 0 & 0 & -e^{i\phi_t} \end{pmatrix} V_{\text{CKM}} \begin{pmatrix} e^{i(\phi_d-\chi)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(\phi_s-\chi)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(\phi_b-\chi)} \end{pmatrix} &= V_{\text{CKM}}^*
\end{aligned}$$

Es lassen sich wie in Abschnitt 4.3 nur fünf der sechs Phasen der CKM-Matrix wegtransformieren, so dass die geforderte Bedingung an das Transformationsverhalten der CKM-Matrix unter dem  $\hat{C}\hat{P}$ -Operator nur für eine reelle Matrix  $V_{\text{CKM}}$  erfüllbar ist, also  $V_{\text{CKM}} = V_{\text{CKM}}^*$  gilt. In der Standardparametrisierung muss dann  $\delta = k\pi$  für  $k \in \mathbb{Z}$  sein. Also folgt:

**Satz (CP-Verletzung im Quark-Sektor):** Eine Phase  $\delta_{\text{CKM}} \neq k\pi$  für  $k \in \mathbb{Z}$  in der Standard-Parametrisierung der CKM-Matrix führt zu einer Verletzung der  $\hat{C}\hat{P}$ -Invarianz der Lagrange-Dichte.

Erwähnenswert ist, dass diese Forderung nach einer reellen CKM-Matrix in einem Teilchenmodell aus nur zwei statt drei Familien immer erfüllt ist, so dass es in einem Standardmodell mit zwei Familien keine CP-Verletzung geben kann - zumindest nicht im Quarksektor. Aus der experimentell beobachteten CP-Verletzung folgerten KOBAYASHI und MASKAWA daher 1973 die **Existenz einer dritten Teilchenfamilie**. Diese Vorhersage fruchtete 1975 in der Entdeckung des  $\tau$ -Leptons durch PERL (Nobelpreis 1995) und 1977 dem Nachweis des bottom-Quarks. Aufgrund seiner immens hohen Masse wurde das top-Quark (178 GeV) erst 1995 nachgewiesen.

## 5.2 Unitaritäts-Dreiecke der CKM-Matrix

Die bereits erwähnte Unitarität der CKM-Matrix  $V_{\text{CKM}}$  lässt sich innerhalb der komplexen Zahlenebene auch geometrisch interpretieren (vgl. Abbildung 7). Die Unitaritätsbedingungen  $V_{\text{CKM}}^\dagger V_{\text{CKM}} = V_{\text{CKM}} V_{\text{CKM}}^\dagger = \mathbb{E}$ , die in Komponentenform

$$\sum_{\alpha} V_{i\alpha}^* V_{j\alpha} = \delta_{ij} \quad \text{und} \quad \sum_i V_{i\alpha}^* V_{i\beta} = \delta_{\alpha\beta}$$

lauten (wobei die lateinischen Indizes über die „up“-Quarks der Familien und die griechischen Indizes über die „down“-Quarks der Familien laufen), kann man als Dreiecke in der komplexen Ebene darstellen. Dazu betrachtet man für jeden Summanden die Strecke der komplexen Zahl zum Nullpunkt als Seite eines Dreiecks. Die Bezeichnung **Unitaritäts-Dreieck** ist dabei üblicherweise für den Spezialfall

$$\sum_{i=1}^3 V_{i1} V_{i3}^* = V_{11} V_{13}^* + V_{21} V_{23}^* + V_{31} V_{33}^* = V_{ud} V_{ub}^* + V_{cd} V_{cb}^* + V_{td} V_{tb}^* = 0 \quad (2)$$

reserviert, allgemein heißen die Dreiecke  $\Delta_q$ , wobei  $q$  das Quark angibt, welches in der Summe nicht auftaucht (beispielsweise  $\Delta_s$  im obigen Fall). Es lässt sich zeigen (siehe [FrX00]), dass alle diese Dreiecke den gleichen Flächeninhalt haben.

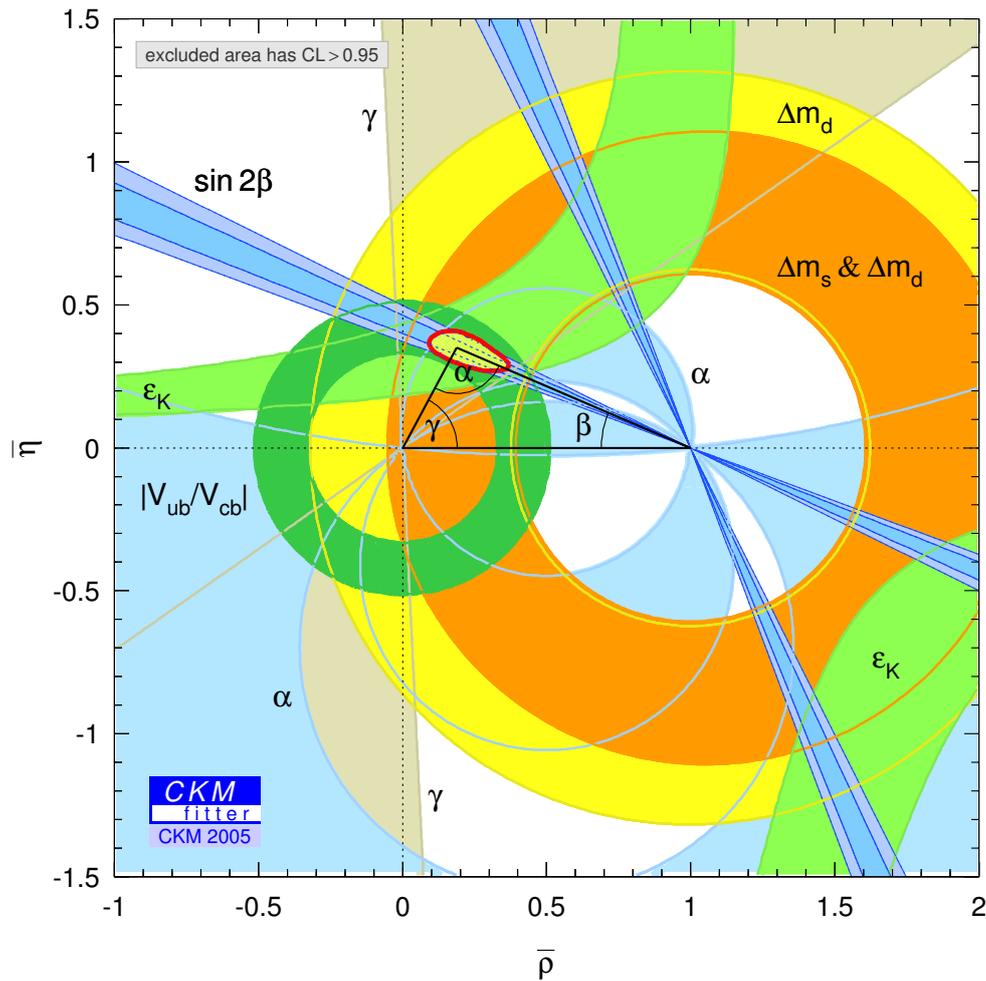
Das **reskalierte Unitaritäts-Dreieck** wird aus dem Unitaritäts-Dreieck von Gleichung (2) durch Wahl einer Phase, so dass  $V_{cd} V_{cb}^*$  reell ist, und Division aller Seitenlängen durch  $|V_{cd} V_{cb}^*|$  konstruiert. Dabei richtet die Phasenwahl eine Seite des Dreiecks zur reellen Achse aus, während der zweiten Schritt die Länge dieser Seite auf eins normiert.

Zwei der Vertizes liegen damit auf den Punkten  $(0, 0)$  und  $(1, 0)$  der komplexen Ebene. Die Koordinaten des verbleibenden dritten Eckpunkts entsprechen den Wolfenstein-Parametern  $(\rho, \eta)$  und der Flächeninhalt des reskalierten Unitaritätsdreiecks beträgt damit  $\frac{|\eta|}{2}$ . Konventionsgemäß sind die **Winkel des Dreiecks** durch

$$\alpha := \arg\left(-\frac{V_{td} V_{tb}^*}{V_{ud} V_{ub}^*}\right), \quad \beta := \arg\left(-\frac{V_{cd} V_{cb}^*}{V_{td} V_{tb}^*}\right) \quad \text{und} \quad \gamma := \arg\left(-\frac{V_{ud} V_{ub}^*}{V_{cd} V_{cb}^*}\right)$$

definiert. Um die Phasen und Parameter der CKM-Matrix konkret zu bestimmen, stehen drei Möglichkeiten zur Verfügung:

1. *Direkte Messungen* liefern Werte für die Absolutbeträge der CKM-Matrix-Elemente.
2. Die *Unitarität der CKM-Matrix* stellt die verschiedenen Einträge in Beziehung zueinander, so dass sich gegenseitige Abschätzungen ergeben.
3. *Indirekte Messungen*, die im Standardmodell durch Schleifen-Korrekturen beschrieben werden.



**Abbildung 7:** Aktuelle Fehlerbalken des Standardmodells und Darstellung des reskalierten Unitaritäts-Dreiecks im CKM-fit, vgl. [CKM05].

Werden alle zur Verfügung stehenden experimentellen Daten in Betracht gezogen, so erhält man im CKM-fit (siehe [CKM05]) entsprechende Werte für die Wolfenstein-Parameter. Stellt man diese Daten zusammen mit ihren Fehlerintervallen und einigen weiteren Parametern grafisch dar, so erhält man das in Abbildung 7 dargestellte Schema mit einem exemplarischen Unitaritäts-Dreieck im relevanten Bereich.

## Literatur

- [Azi95] AZIMOV, Y. I., „Neutral Kaons without Weisskopf-Wigner Approximation“, [hep-ph/9511285], 1995.
- [FrX00] FRITZSCH, Harald, XING, Zhi-zhong: „Mass and Flavor Mixing Schemes of Quarks and Leptons“, Progress in Particle and Nuclear Physics **45**: 1-81 [hep-ph/9912358], 2000.
- [Hag02] HAGIWARA, KAORU et al.: „The Cabibbo-Kobayashi-Maskawa Quark-Mixing Matrix“, Physical Review **D66**, 010001-1, <http://pdg.lbl.gov>, 2002.
- [Hol96] HOLLIK, Wolfgang: „Electroweak Theory“, [hep-ph/9602380], 1996.
- [Lei93] LEIGH, Robert G.: „The strong CP problem, string theory and the Nelson-Barr mechanism“, [hep-ph/9307214], 1993.

- [Neu96] NEUBERT, Matthias, „*B Decays and CP Violation*“, International Journal of Modern Physik A **11**: 4173-4240 [hep-ph/9604412], 1996.
- [Nir01] NIR, Yosef, „*CP Violation - A New Era*“, [hep-ph/0109090], 2001.
- [Reb05] REBHAN, Eckard: „*Theoretische Physik II - Quantenmechanik, Quantenfeldtheorie, Elementarteilchentheorie, Thermodynamik und Statistik*“, München: Elsevier GmbH, Spektrum Akademischer Verlag, 2005.
- [CKM05] CKMfitter Group (J. CHARLES et al.), [hep-ph/0406184], <http://ckmfitter.in2p3.fr>, 2005