Theoretische Physik II	**Probeklausur**	10.7.2012

[Spickzettel bereitlegen ; Wecker auf 2 Stunden stellen ; Alle Aufgaben lesen, selektiv bearbeiten]
[Nach 2h Blatt umdrehen, korrigieren]

Aufgabe 1: Bindungszustand im eindimensionalen Potential

Welchen Wert muss L haben, damit die Grundzustandsenergie eines Teilchens (m) im Potential

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m} & \text{für } |x| < a \qquad \text{mit } \kappa, a > 0 \\ 0 & \text{für } a < |x| < L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

den Wert Null hat? [Strategie: V-Skizze, Bereiche, Dgl, Ansätze, Lsg, Anschluss, Antwort.]

Aufgabe 2: Drehimpuls

Sei $\hat{\vec{S}}$ ein Spin-Operator und $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$ der Gesamtdrehimpuls.

(a) Drücken Sie den Operator $\hat{\vec{J}}^2$ durch $\hat{\vec{L}}^2$, $\hat{\vec{S}}^2$, $\hat{L}_3$, $\hat{S}_3$ sowie die Leiteroperatoren $\hat{L}_\pm = \hat{L}_1 \pm i\hat{L}_2$ und $\hat{S}_\pm = \hat{S}_1 \pm i\hat{S}_2$ aus.

(b) Die gemeinsamen Eigenzustände von $\hat{\vec{L}}^2$, $\hat{L}_3$, $\hat{\vec{S}}^2$ und $\hat{S}_3$ seien $|\ell, m_\ell; s, m_s\rangle$. Zeigen Sie, dass $|\ell, \ell; s, s\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{\vec{J}}^2$ ist und geben Sie den zugehörigen Eigenwert an.
[Hinweis: Für die Leiteroperatoren gilt (Condon-Shortley) $\hat{J}_\pm|j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\,|j, m \pm 1\rangle$.]

(c) Betrachten Sie nun den Zustand $|\psi\rangle = a_{\ell m}\,|\ell, m - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + b_{\ell m}\,|\ell, m + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$. Wie muss das Verhältnis $\frac{b_{\ell m}}{a_{\ell m}}$ sein, damit $|\psi\rangle$ ein $\hat{\vec{J}}^2$-Eigenzustand zum Eigenwert $j = \ell + \frac{1}{2}$ ist?

Aufgabe 3: Rayleigh-Ritz Variationsverfahren

Betrachten Sie den eindimensionalen harmonischen Oszillator $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}\,m\omega^2\hat{x}^2$, und bestimmen Sie eine obere Schranke für dessen Grundzustandsenergie E_0 per Variationsansatz

$$\psi(x) = \begin{cases} C\left(1 - \frac{|x|}{a}\right) & \text{für } |x| \le a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ,$$

wobei $C > 0$ eine Normierungskonstante und a der Variationsparameter sei.

(a) Bestimmen Sie C per Normierungsbedingung.

(b) Berechnen Sie das notwendige Matrixelement.

(c) Bestimmen Sie das optimale a und vergleichen Sie mit dem exakten Ergebnis für E_0.

Aufgabe 4: Störungstheorie in zweiter Ordnung

$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda\hat{H}_1$ mit $|\lambda| \ll 1$. Das ungestörte System $\hat{H}_0$ sei bereits gelöst: $\hat{H}_0|\varphi_n\rangle = E_{0n}|\varphi_n\rangle$. Leiten Sie den Ausdruck für $E_n^{(2)}$ der Entwicklung $E_n = E_{0n} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \mathcal{O}(\lambda^3)$ her, wobei $\hat{H}|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$ ist. Drücken Sie schliesslich $E_n^{(2)}$ durch die E_{0n}, $|\varphi_n\rangle$ und $\hat{H}_1$ aus.

[Hinweis: In erster Ordnung hatten wir $|\psi_n^{(1)}\rangle = \sum_{p \neq n} \frac{\langle\varphi_p|\hat{H}_1|\varphi_n\rangle}{E_{0n} - E_{0p}}\,|\varphi_p\rangle$ erhalten.]

Theoretische Physik II	**Probeklausur**	Lösungshinweise

Aufgabe 1:
Aussenbereich, $|x| > L: \ \psi(x) = 0 \ \Rightarrow \ \psi(\pm L) = 0$
Bereich I, $a < x < L$: SG $-\partial_x^2 \psi_I = 0 \cdot \psi_I$, Lsg $\psi_I(x) = Ax + B = A(x - L)$
Bereich II, $-a < x < a$: SG $(-\partial_x^2 - \kappa^2)\psi_{II} = 0 \cdot \psi_{II}$, Lsg $\psi_{II}(x) = C\cos(\kappa x) + D\sin(\kappa x)$,
$D = 0$ da Grundzustand keine Knoten hat
Anschluss $\psi_I(a) \stackrel{!}{=} \psi_{II}(a) \ \Rightarrow \ A(a - L) = C\cos(\kappa a)$
$\psi_I'(a) \stackrel{!}{=} \psi_{II}'(a) \ \Rightarrow \ A = -\kappa C \sin(\kappa a)$
Teilen der beiden letzten Gln führt auf $L = a + \frac{\cos(\kappa a)}{\kappa \sin(\kappa a)}$

Aufgabe 2:
(a) $\vec{J}^2 = \vec{L}^2 + \vec{S}^2 + 2\vec{S} \cdot \vec{L}$ wegen $[\vec{S}, \vec{L}] = 0$; und mit $2\vec{S} \cdot \vec{L} = 2S_3L_3 + 2S_1L_1 + 2S_2L_2 =$
$2S_3L_3 + S_+L_- + S_-L_+$ gilt insgesamt $\vec{J}^2 = \vec{L}^2 + \vec{S}^2 + 2S_3L_3 + S_+L_- + S_-L_+$
(b) $\vec{J}^2|\ell,\ell;s,s\rangle \stackrel{(a)}{=} \hbar^2 \left[\ell(\ell+1) + s(s+1) + 2\ell s + 0 + 0\right] |\ell,\ell;s,s\rangle = \hbar^2(\ell{+}s)(\ell{+}s{+}1)|\ell,\ell;s,s\rangle$
(c) $\vec{J}^2|\psi\rangle \stackrel{(a)}{=} \hbar^2 \left[\ell(\ell+1) + \frac{3}{4} + (m - \frac{1}{2}) + 0 + \frac{b_{\ell m}}{a_{\ell m}} \sqrt{(\ell + m + \frac{1}{2})(\ell - m + \frac{1}{2})}\right] a_{\ell m}|\ell, m{-}\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$
$+\hbar^2 \left[\ell(\ell+1) + \frac{3}{4} - (m + \frac{1}{2}) + 0 + \frac{a_{\ell m}}{b_{\ell m}} \sqrt{(\ell - m + \frac{1}{2})(\ell + m + \frac{1}{2})}\right] b_{\ell m}|\ell, m{+}\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$
Also muss die erste [..] $\stackrel{!}{=} j(j{+}1) = (\ell{+}\frac{1}{2})(\ell{+}\frac{3}{2}) = \ell(\ell{+}1) + \frac{3}{4} + \ell$ sein, woraus $\frac{b_{\ell m}}{a_{\ell m}} = \sqrt{\frac{\ell - m + \frac{1}{2}}{\ell + m + \frac{1}{2}}}$
folgt, und mit diesem Wert ist auch die zweite [..] $= \ell(\ell+1) + \frac{3}{4} + \ell = j(j+1)$.

Aufgabe 3:
(a) $1 \stackrel{!}{=} \langle\psi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^2(x) = C^2\, 2 \int_0^a dx\, (1 - \frac{x}{a})^2 = C^2\, 2(a - a + \frac{a}{3}) \ \Rightarrow \ C = \sqrt{\frac{3}{2a}}$
(b) $E_0 \le \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \int dx\, \psi(x)\psi''(x) + \frac{1}{2} m\omega^2 \int dx\, x^2\psi^2(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{2C^2}{a} + \frac{1}{2} m\omega^2 \frac{C^2 a^3}{15}$
$\Rightarrow \ E_0 \le \frac{\hbar\omega}{2} \left[\frac{3}{A} + \frac{A}{10}\right]$ mit $A \equiv \frac{m\omega}{\hbar}\, a^2$
(c) $[\ \ ]' = -\frac{3}{A^2} + \frac{1}{10} \stackrel{!}{=} 0 \ \Rightarrow \ A = \pm\sqrt{30}$; $[\ \ ]'' = \frac{6}{A^3} \stackrel{!}{>} 0 \ \Rightarrow \ A = +\sqrt{30}$ ist Minimum
$\Rightarrow \ E_0 \le \frac{\hbar\omega}{2}\sqrt{\frac{6}{5}}$; Schranke ist nur ca 10% über exaktem Ergebnis.

Aufgabe 4:
λ^2-Koeff-Vergl in SG $(H_0 + \lambda H_1 - E_{0n} - \lambda E_n^{(1)} - \lambda^2 E_n^{(2)} - \ldots)(\varphi_n + \lambda\psi_n^{(1)} + \lambda^2\psi_n^{(2)} + \ldots) = 0$
liefert $(H_0 - E_{0n})\psi_n^{(2)} + (H_1 - E_n^{(1)})\psi_n^{(1)} - E_n^{(2)}\varphi_n = 0$. Operiere auf diese Glg v.li. mit $\int dx\, \varphi_n^\dagger$
$\Rightarrow \ \langle\varphi_n|H_0 - E_{0n}|\psi_n^{(2)}\rangle + \langle\varphi_n|H_1 - E_n^{(1)}|\psi_n^{(1)}\rangle - E_n^{(2)}\langle\varphi_n|\varphi_n\rangle = 0$
Erste $\langle..\rangle = 0$ da H_0 hermitesch, letzte=1 (Norm), $\Rightarrow \ E_n^{(2)} = \langle\varphi_n|H_1|\psi_n^{(1)}\rangle - E_n^{(1)}\langle\varphi_n|\psi_n^{(1)}\rangle$
1.Ordnung $\psi_n^{(1)}$ einsetzen $\Rightarrow \ E_n^{(2)} = \sum_{p\neq n}\langle\varphi_n|H_1|\varphi_p\rangle \frac{\langle\varphi_p|H_1|\varphi_n\rangle}{E_{0n} - E_{0p}} - E_n^{(1)} \cdot 0 = \sum_{p\neq n} \frac{|\langle\varphi_p|H_1|\varphi_n\rangle|^2}{E_{0n} - E_{0p}}$